a) $\sum x^k$ est une série géométrique.

On sait déjà qu'elle converge ssi $x \in]-1;1[$.

Vu que $a_k = 1 \quad \forall k \geq 1$, $\lim \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = 1$.

Le théorème de la p. 21 confirme un résultat connu.

b) $$\sum \frac{x^k}{k} = \sum \frac{1}{k} x^k = \sum a_k x^k$$

avec $a_k = \frac{1}{k}$.

$$\lim \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim \left| \frac{1/k}{1/(k+1)} \right|$$

$$= \lim \frac{k+1}{k} = 1$$

Le rayon de convergence est donc $r = 1$, d'après le thm. p. 21.

Vu que $\sum \frac{1}{k}$ diverge (série harmonique)

et que $\sum (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = (-1) \sum \frac{(-1)^k}{k}$

converge (série harmonique alternée),

$\sum \frac{x^k}{k}$ converge $\Leftrightarrow$ $x \in [-1; 1[$

c) $k^3 x^k = a_k x^k$ avec $a_k = k^3$

$$\lim \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim \frac{k^3}{(k+1)^3} = \lim \frac{k^3}{k^3+3k^2+3k+1}$$

$$= 1$$

Le rayon de convergence est $r = 1$ (thm. p. 21)

La série $\sum k^3$ diverge ($\lim k^3 = +\infty$),

ce qui règle le cas $x = 1$.

La série $\sum (-1)^k k^3$ diverge également,

car $\lim (-1)^k k^3$ est divergente.

Finalement, $\sum k^3 \cdot x^k$ converge

$\Leftrightarrow x \in]-1;1[$

d) $a_k = \frac{1}{k \cdot 2^k}$

$$\lim \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim \frac{\frac{1}{k\, 2^k}}{\frac{1}{(k+1)\, 2^{k+1}}}$$

$$= \lim \frac{(k+1)\, 2^{k+1}}{k \cdot 2^k}$$

$$= \lim 2 \cdot \frac{k+1}{k} = 2$$

$\Rightarrow r = 2$ (thm. p. 21)

Traitons le cas $x=2$:

$$\sum \frac{2^k}{k\cdot 2^k} = \sum \frac{1}{k} > +\infty$$

Série harmonique

Et le cas $x=-2$

$$\sum \frac{(-2)^k}{k\cdot 2^k} = \sum \frac{(-1)^k\cdot \cancel{2^k}}{k\cdot \cancel{2^k}}$$

$$= (-1) \sum (-1)^{k+1}\cdot \frac{1}{k}$$

$$< +\infty$$

Série harmonique alternée

Finalement:

$$\sum \frac{x^k}{k\cdot 2^k} < +\infty \quad \forall\, x \in [-2;2]$$

e) $a_k = \frac{1}{k^k}$

$$\frac{1}{\lim \sqrt[k]{|a_k|}} = \frac{1}{\lim \sqrt[k]{1/k^k}}$$

$$= \frac{1}{\lim \frac{1}{k}}$$

$$= « \frac{1}{0} » = +\infty$$

Le rayon de convergence est $r = +\infty$

$$\Rightarrow \sum \frac{x^k}{k^k} < +\infty \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$$

f) $a_k = \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ (Série harmonique alternée)

$$\lim \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim \frac{1/k}{1/(k+1)}$$

$$= \lim \frac{k+1}{k} = 1$$

$\boxed{x = -1}$

$$\sum \frac{(-1)^{k+1}(-1)^k}{k} = \sum \frac{(-1)^{2k+1}}{k}$$

$$= \sum \frac{-1}{k}$$

$$= (-1) \sum \frac{1}{k} \to +\infty$$

série harmonique

$\boxed{x = 1}$ La série converge.

$$\Rightarrow \sum \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k} \text{ converge } \Leftrightarrow x \in]-1 ; 1]$$

g) $a_k = (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{k}} = (-1)^{k+1} \cdot k^{-\frac{1}{2}}$

$$\lim \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim \frac{k^{-\frac{1}{2}}}{(k+1)^{-\frac{1}{2}}}$$

$$= \lim \left(\frac{k}{k+1} \right)^{-\frac{1}{2}} = 1$$

On peut aussi écrire:

$$\lim \frac{1/\sqrt{k}}{1/\sqrt{k+1}} = \lim \frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{k}} = \lim \sqrt{\frac{k+1}{k}}$$

$$= \lim \sqrt{1 + \frac{1}{k}} = 1$$

$\boxed{r = 1}$

$\boxed{x = 1}$ $\sum (-1)^{k+1} \frac{1}{\sqrt{k}}$ est alternée

$k+1 > k$

$\Leftrightarrow \sqrt{k+1} > \sqrt{k}$ car la racine est une fonction croissante.

$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{k+1}} < \frac{1}{\sqrt{k}}$

Le critère de Leibniz permet d'affirmer

que $\sum (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{k}}$ converge,

car $\lim \frac{1}{\sqrt{k}} = 0$

$\boxed{x = -1}$ $\quad \sum (-1)^{k+1} \cdot \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} = -\sum \frac{1}{k^{1/2}}$

Vu que $\sum \frac{1}{k^{1/2}}$ est de Riemann et

que $\frac{1}{2} < 1$, la série $\sum \frac{1}{k^{1/2}}$ diverge.

$\sum (-1)^{k+1} \frac{x^k}{\sqrt{k}}$ diverge donc pour $x = -1$.