$f(0) = -2$

	1	
$-$	‖	$+$

1) $f(x) = \dfrac{2}{x-1}$

$2 = 0$ $\emptyset$

$x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

$D_f = \mathbb{R} - \{1\}$

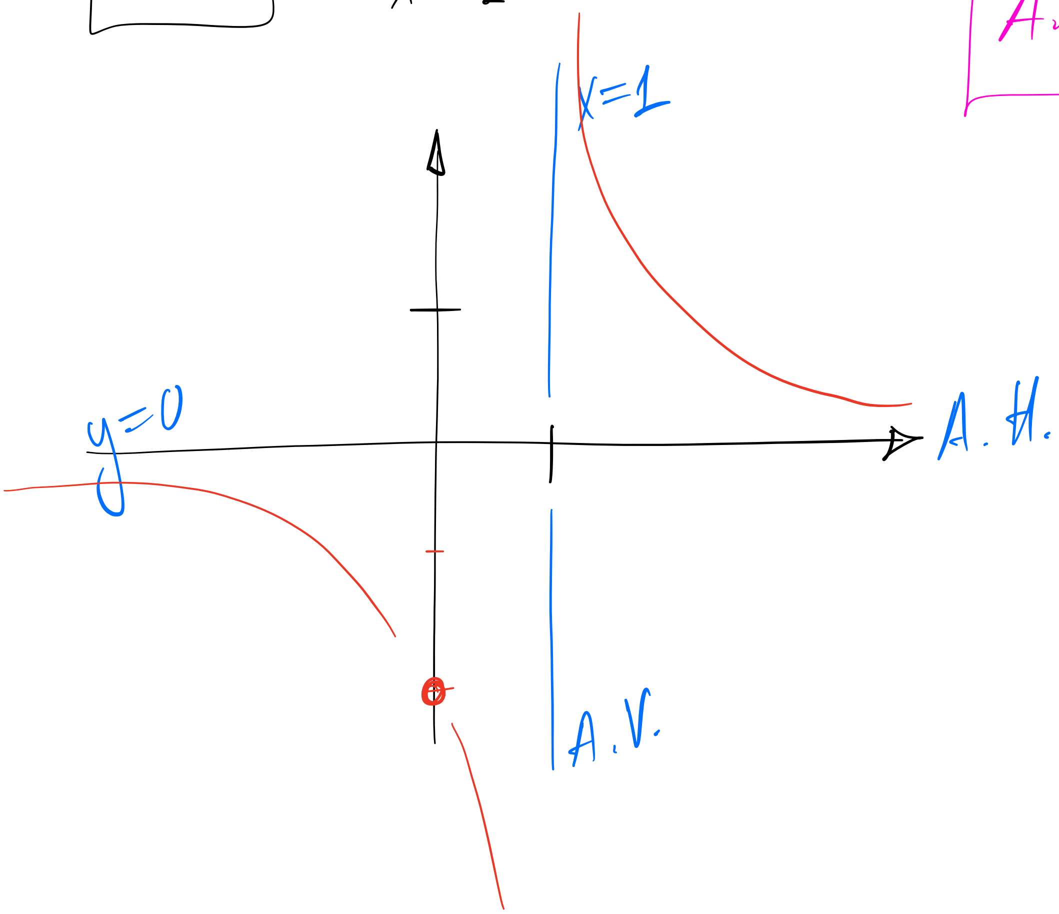
Pas de zeros

$\boxed{\text{A. H.}}$ $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{2}{x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{x} = 0$

$\boxed{\text{A.H. en } y=0}$

$\boxed{\text{A. V.}}$ $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{2}{x-1} = \text{«} \frac{2}{0} \text{»} = \infty$

$\boxed{\text{A.V. en } x=1}$



$f(0) = -2$

2) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-4} = \dfrac{x \cdot x}{(x+2)(x-2)}$

$D_f = \mathbb{R} - \{-2 ; 2\}$

Zéros : $x \cdot x = 0 \iff \boxed{x=0}$

$f(1) = \dfrac{1}{1-4} < 0$

$f(-1) = \dfrac{1}{1-4} < 0$

$f(3) = \dfrac{9}{9-4} > 0$

$f(-3) = \dfrac{9}{9-4} > 0$

Signe :

x		-2		0		2	
	$+$	$\|\|$	$-$	0	$-$	$\|\|$	$+$

$\boxed{\text{A.V.}}$ $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = « \dfrac{2^2}{2^2-4} »$

$= « \dfrac{4}{0} » = \infty$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{A.V. en } x=2}$

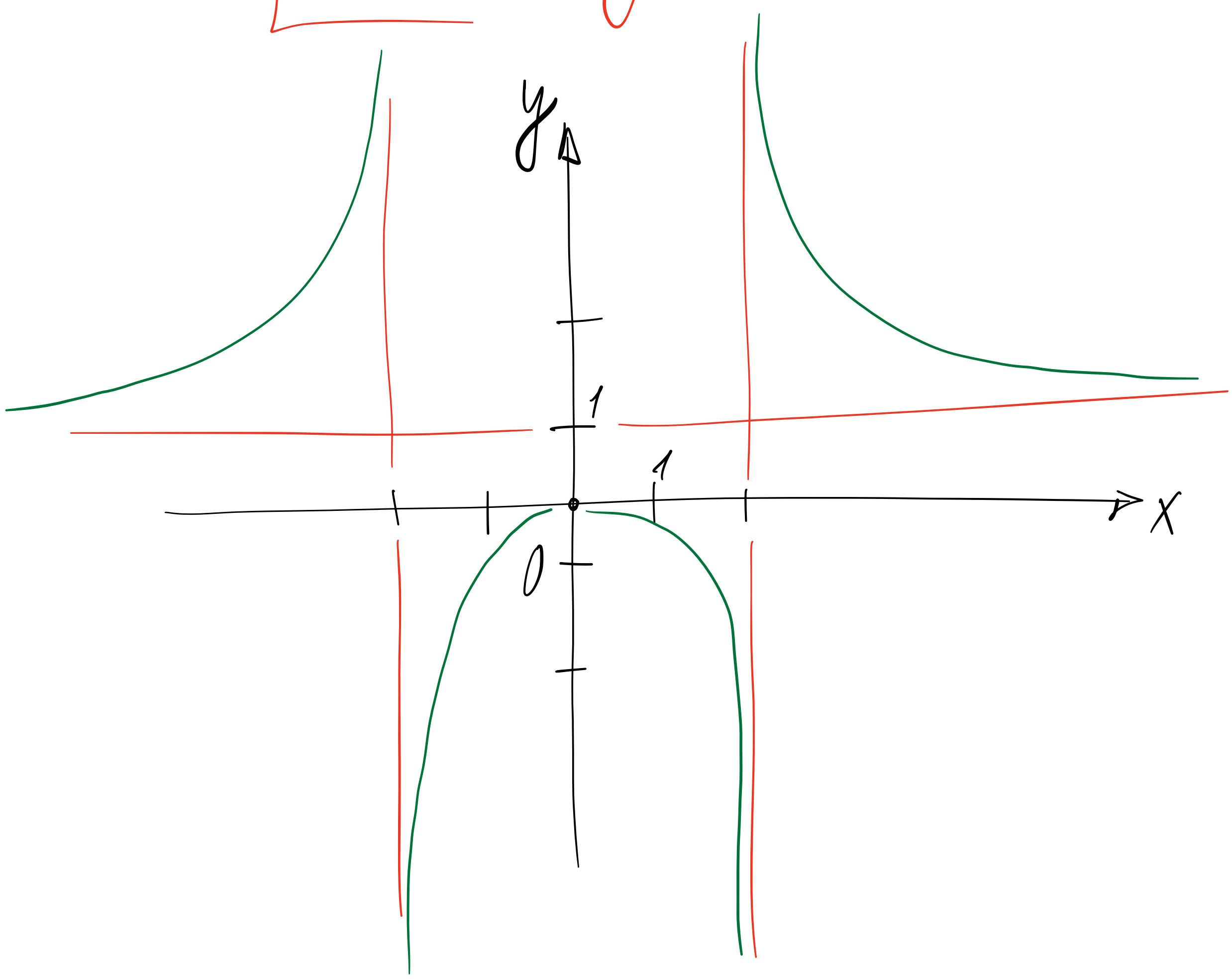
$\lim\limits_{x \to -2} f(x) = « \dfrac{(-2)^2}{(-2)^2-4} » = « \dfrac{4}{0} » = \infty$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{A.V. en } x=-2}$

$\boxed{A.H.}$ $\quad \lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x^2-4}$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$\Rightarrow \boxed{A.H. \text{ en } y = 1}$



3) $$f(x) = \frac{x^2-3x+4}{x^2-4x+3}$$

$$x^2-4x+3=0 \iff (x-3)(x-1)=0 \iff \begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array}$$

$$x = \frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2} = \frac{4\pm 2}{2}$$

$x=1$ ✓

$x=3$ ✓

$$\Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{1;3\}$$

$$x^2-3x+4=0 \iff x = \frac{3\pm\sqrt{9-16}}{2} = \frac{3\pm\cancel{\sqrt{-7}}}{2}$$

$\Rightarrow f$ n'a pas de zéro.

Signe:

x		1		3	
	$+$	$\|\|$	$-$	$\|\|$	$+$

$f(0) = \frac{4}{3} > 0$

$f(2) = \frac{2}{-1} < 0$

$\boxed{\text{A.H.}}$ $$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

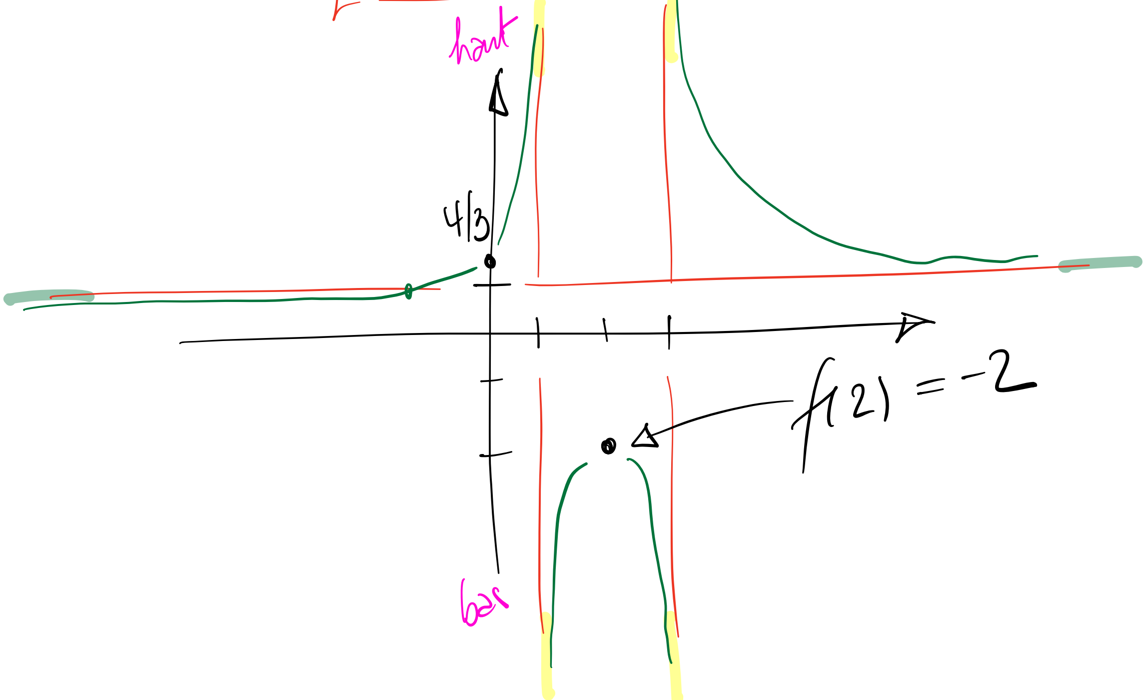
$\boxed{\text{A.H. en } y=1}$

$\boxed{\text{A.V.}}$ $$\lim_{x\to 1} f(x) = « \frac{2}{0} » = \infty$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{A.V. en } x=1}$

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \langle\langle \frac{4}{0} \rangle\rangle = \infty$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{A.V. en } x=3}$



4) $$f(x) = \frac{x^2+5x+6}{x^2+6x+8} = \frac{(x+3)(x+2)}{(x+2)(x+4)}$$

$$f(0) = \frac{6}{8} > 0$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{-4; -2\}$$

A exclure.

Zeros : $(x+3)(x+2) = 0 \Leftrightarrow x = -3 \,/\, \cancel{x = -2}$

Le seul zero est : $x = -3$

Signe :

		-4		-3		-2	
	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$

Comment trouver le signe : $f(0)$ donne le signe dans la case tout à droite.

$$\frac{(x+3)\cdot(x+2)}{(x+2)(x+4)}$$

$x+3$ et $x+4$ sont « seuls » $\Rightarrow$ Le signe change au voisinage de -3 de -4.

$x+2$ est « double » $\Rightarrow$ Pas de changement de signe au voisinage de -2

Asymptotes :

Verticales

$$\lim_{x\to -2} f(x) = « \frac{0}{0} »$$

$$= \lim_{x\to -2} \frac{(x+3)\cancel{(x+2)}}{\cancel{(x+2)}(x+4)}$$

$$= \lim_{x \to -2} \frac{x+3}{x+4} = \frac{1}{2}$$

Il y a donc un TROU en $\left(-2 ; \frac{1}{2}\right)$

$$\lim_{x \to -4} f(x) = \lim_{x \to -4} \frac{x+3}{x+4} = \text{«} \frac{-1}{0} \text{»} = \infty$$

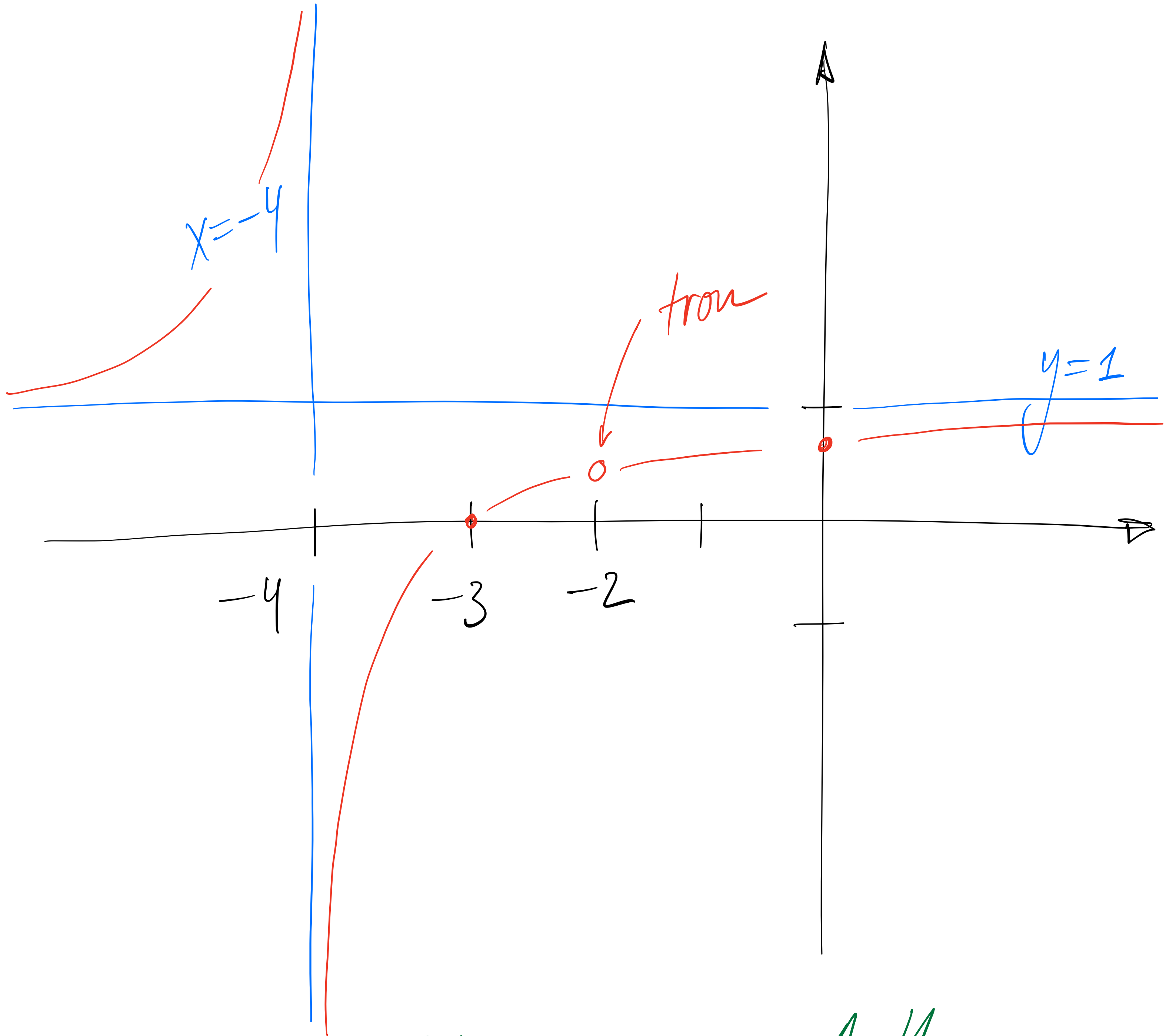
$$\boxed{\text{A.V. en } x = -4}$$

$\Rightarrow$ ~~A.O.~~

Il y a une HORIZONTALE, vu que la différence des degrés haut-bas est 0.

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2+5x+6}{x^2+6x+8} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$\boxed{\text{A.H. en } y = 1}$$



Position de f relativement à son A.H.

$$d(x) = \frac{x^2+5x+6}{x^2+6x+8} - 1 = \frac{x^2+5x+6}{x^2+6x+8} - \frac{x^2+6x+8}{x^2+6x+8}$$

$$= \frac{x^2+5x+6-x^2-6x-8}{x^2+6x+8} = \frac{-x-2}{x^2+6x+8} = \frac{-x-2}{(x+2)(x+4)}$$

$f(x) = 0 \iff \cancel{x = -2}$ ← À exclure

$D_f = \mathbb{R} - \{-4 ; -2\}$

	-4		-2	
$+$	$\|\|$	$-$	$\|\|$	$-$

f est au dessus de $y=1$ à gauche

f est en dessous de $y=1$ à droite

5) $f(x) = \dfrac{x^2-3x+3}{x-2}$

négatif

$x^2-3x+3 = 0 \iff x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-12}}{2}$

Pas de zéro pour f.

$D_f = \mathbb{R} - \{2\}$

		2	
	$-$	$\|\|$	$+$

$f(0) = -1{,}5$

Asymptotes

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2-3x+3}{x-2} = « \frac{1}{0} » = \infty$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{A.V. en } x = 2}$$

Vu que $\text{degré}(x^2-3x+3) - \text{degré}(x-2) = 2-1$
$= 1,$

Il y a une asymptote oblique.

$$\begin{array}{r|l} x^2-3x+3 & x-2 \\ \cline{2-2} x^2-2x & x-1 \\ \cline{1-1} -x+3 & \\ -x+2 & \\ \cline{1-1} 1 & \end{array}$$

$$\Rightarrow x^2-3x+3 = (x-2)(x-1)+1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^2-3x+3}{x-2} = \frac{(x-2)(x-1)}{x-2} + \frac{1}{x-2}$$

$$= x-1 + \underbrace{\frac{1}{x-2}}_{\delta(x)}$$

On a une A.O.

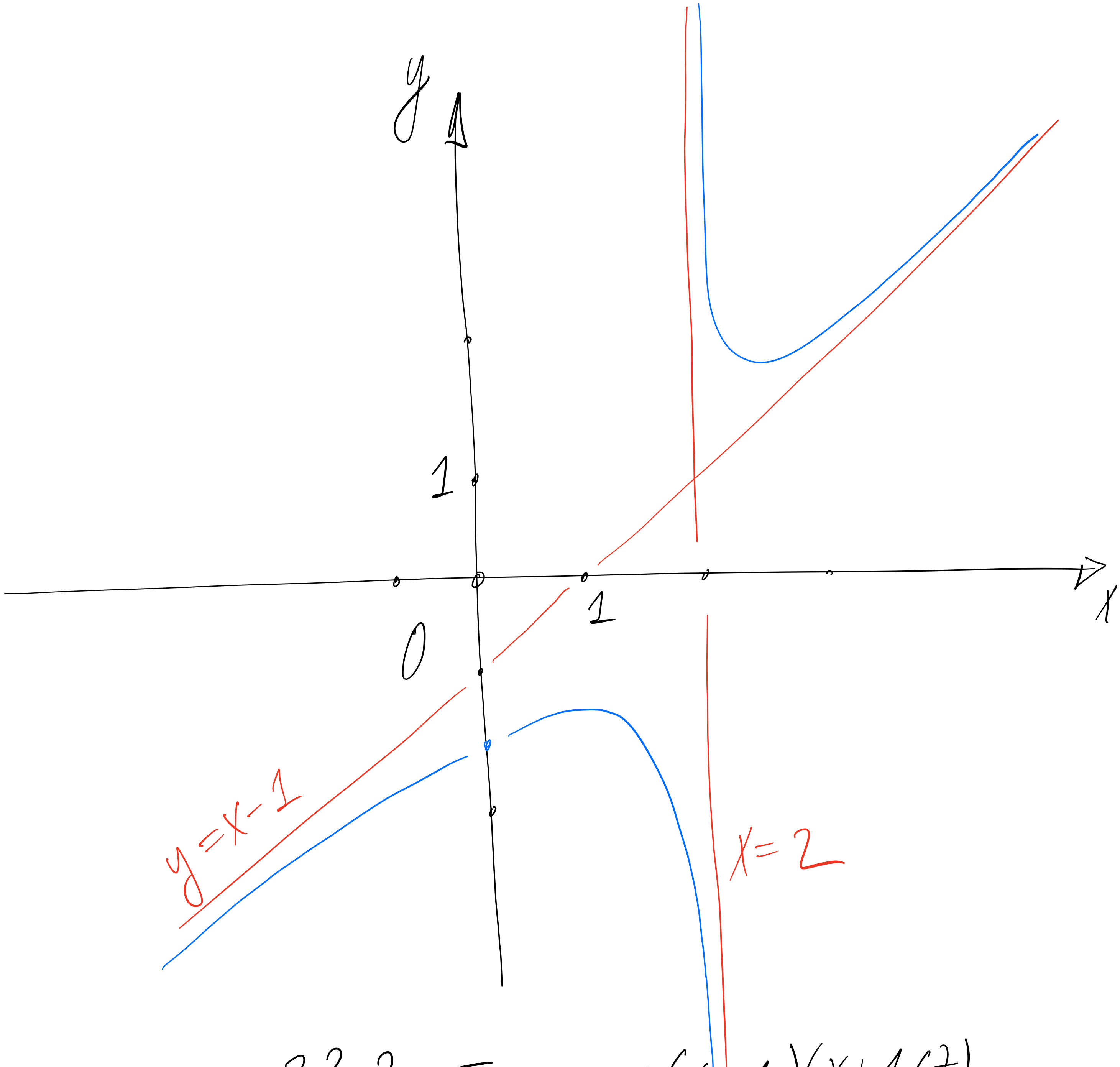
en $y = x-1$

Le signe de $\delta(x) = \dfrac{1}{x-2}$ donne

la position du graphe de f relativement

à $y = x+1$, son asymptote.

		2	
	$-$	‖	$+$
	dessous		dessus



6) $f(x) = \dfrac{3x^2+2x-5}{(x+1)^2} = \dfrac{3(x-1)(x+1{,}67)}{(x+1)^2}$

$D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$ car $(x+1)^2 = 0 \iff x = -1$

Zeros: $3x^2+2x-5 = 0 \iff x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4+60}}{6}$ $\left\langle \begin{array}{l} 1 \\ -5/3 \end{array} \right.$

x		$-1{,}67$		-1		1	
	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$

$f(0) = -5$

$\boxed{\text{Asymptotes}}$

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} \frac{3x^2+2x-5}{(x+1)^2} = « \frac{-4}{0} » = \infty$$

On a une $\boxed{A.V. \text{ en } x = -1}$

Vu que degré$(3x^2+2x-5)$ − degré$((x+1)^2) = 0$,

on a une A.H.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2+2x-5}{(x+1)^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{3\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} = \lim_{x \to \infty} 3 = 3$$

$\Rightarrow \boxed{A.H. \text{ en } y = 3}$

Étude de la position :

$$\delta(x) = f(x) - 3 = \frac{3x^2+2x-5}{(x+1)^2} - 3$$

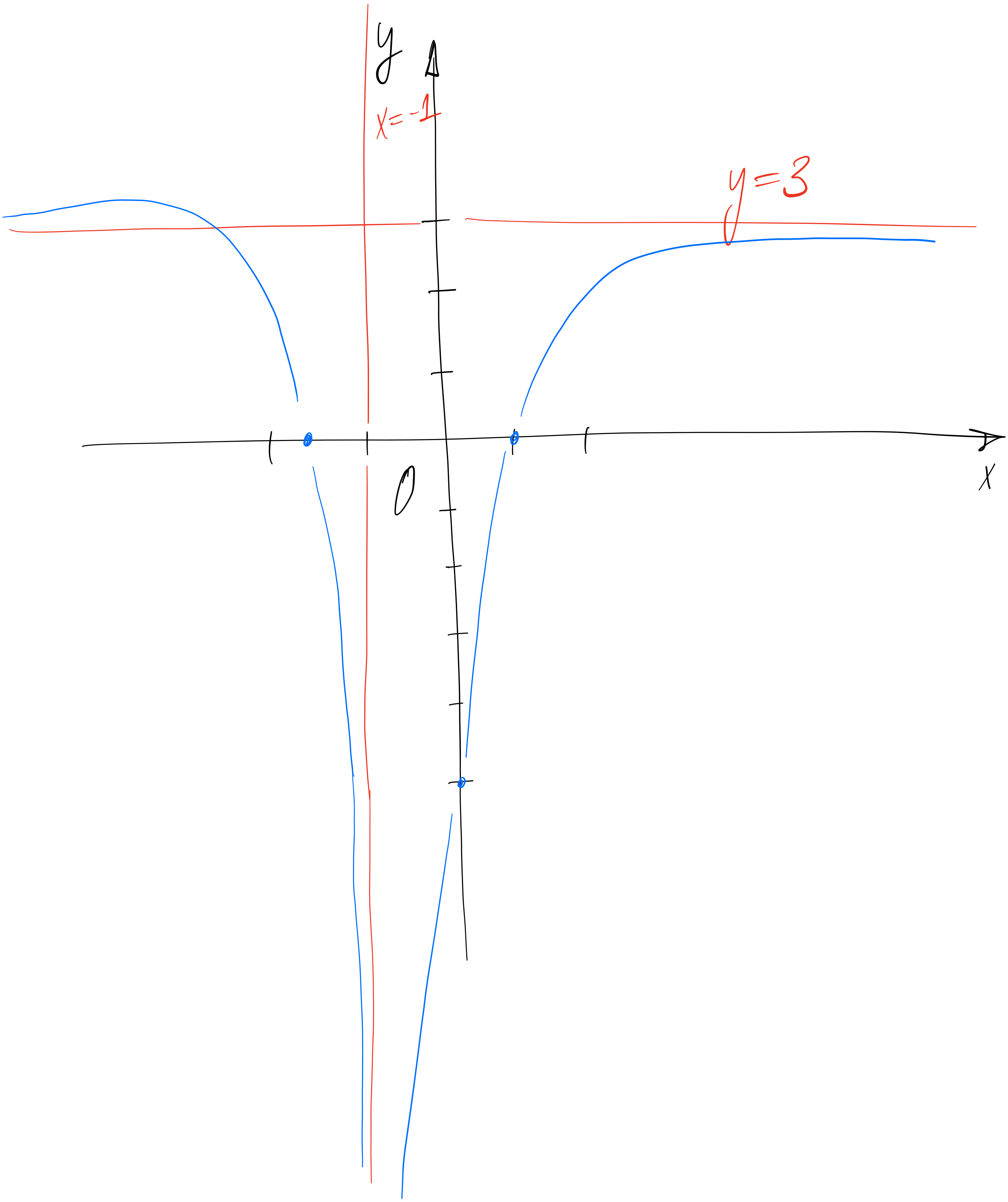
$$= \frac{3x^2+2x-5-3(x+1)^2}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{\cancel{3x^2}+2x-5-\cancel{3x^2}-6x-3}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{-4x-8}{(x+1)^2}$$

$$-4x-8=0 \Leftrightarrow 4x=-8 \Leftrightarrow x=-2$$

x		-2		-1	
	$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$
	dessus				dessous


y
x=-1
y=3
0
x

7) $f(x) = \frac{1}{2}x + 1 + \frac{1}{x} = \frac{x}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{x}$

$$= \frac{x^2}{2x} + \frac{2x}{2x} + \frac{2}{2x} = \frac{x^2+2x+2}{2x}$$

$D_f = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$

négatif

Zéros: $x^2 + 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2}$

La fonction f n'a pas de zéros.

x		0	
$f(x)$	$-$	‖	$+$

$f(1) = 2{,}5$

$\boxed{\text{Asymptotes}}$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x^2+2x+2}{2x} = « \frac{2}{0} » = \infty$$

On a une $\boxed{\text{A.V. en } x = 0}$

degré(x^2+2x+2) − degré$(2x)$ $= 2-1 = 1$

On a donc une A. O.

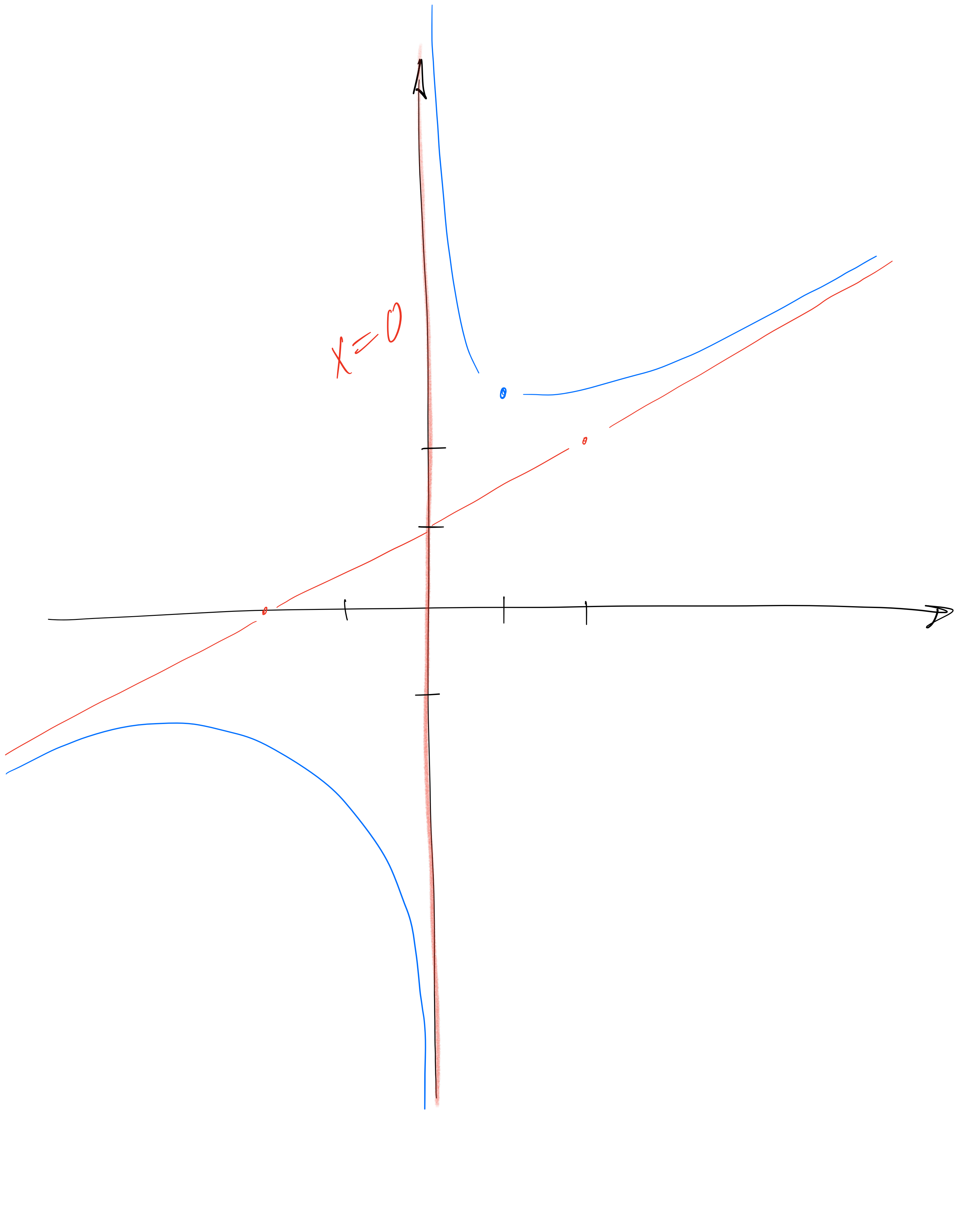
$$\begin{array}{r|l} x^2+2x+2 & 2x \\ \cline{2-2} x^2 & \frac{1}{2}x+1 \\ \cline{1-1} 2x+2 & \\ 2x & \\ \cline{1-1} 2 & \end{array}$$

$$\Rightarrow x^2+2x+2 = 2x\cdot\left(\frac{1}{2}x+1\right)+2$$

$$\Rightarrow \frac{x^2+2x+2}{2x} = \frac{1}{2}x+1+\underbrace{\frac{2}{2x}}_{\delta(x)}$$

Le signe de $\delta(x) = \dfrac{2}{2x}$ nous donne la position du graphe de f relativement à son asymptote oblique :

	0	
$-$	$\|\|$	$+$
dessous		dessus


x=0

8) $f(x) = \dfrac{x^2-2x}{x-1} = \dfrac{x\cdot(x-2)}{x-1}$

$D_f = \mathbb{R} - \{1\}$

Zeros: $x^2-2x=0 \iff x(x-2)=0$

$\iff x=0 \,/\, x=2$

	0		1		2	
$-$	0	$+$	$\parallel$	$-$	0	$+$

$f(-1) = \dfrac{3}{-2} < 0$

Asymptotes:

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-2x}{x-1} = «\dfrac{-1}{0}» = \infty$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{A.V. en } x=1}$

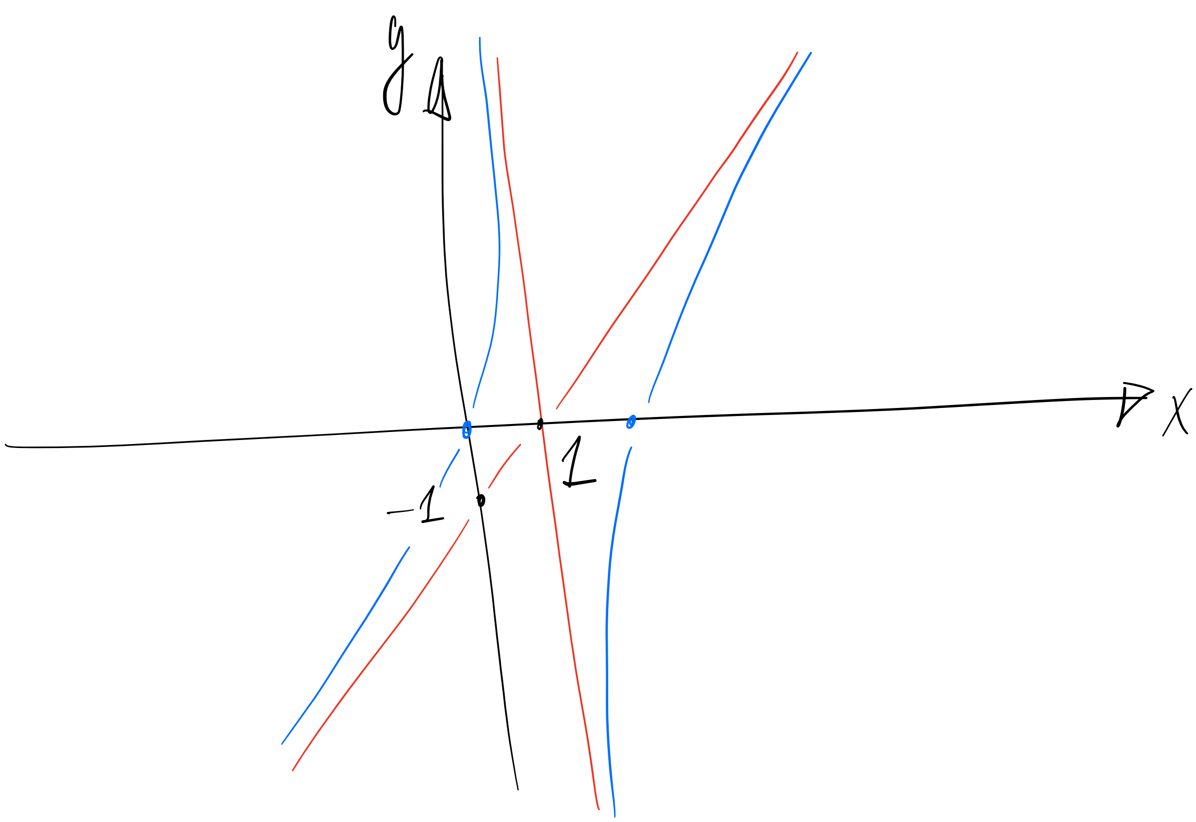
Vu la différence des degrés, on a une A.O.

$$\begin{array}{r|l} x^2-2x & x-1 \\ \cline{2-2} x^2-x & x-1 \\ \hline -x & \\ -x+1 & \\ \hline -1 & \end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2-2x}{x-1} = x-1+\underbrace{\frac{-1}{x-1}}_{\delta(x)}$$

Signe de δ :

		1	
$\delta(x)$	$+$	$\Vert$	$-$
	dessus		dessous



9)

$$f(x) = \frac{x^2-4x}{x^2-4x+3} = \frac{x(x-4)}{(x-1)(x-3)}$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{1;3\}$$

$$f(2) = \frac{-4}{-1} = 4 > 0$$

Zeros: $x=0$ / $x=4$

	0		1		3		4	
+	0	−	‖	+	‖	−	0	+

$$\boxed{\text{Asymptotes}}$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x(x-4)}{(x-1)(x-3)} = «\frac{1\cdot(-3)}{0\cdot(-2)}»$$

$$= «\frac{-3}{0}» = \infty$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{A.V. en } x=1}$$

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} \frac{x(x-4)}{(x-1)(x-3)} = « \frac{3 \cdot (-1)}{2 \cdot 0} »$$

$$= « \frac{-3}{0} » = \infty$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{A.V. en } x = 3}$$

La différence des degrés vaut 0 : il y a une A.H. et pas d'A.O.

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 4x}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x^2}$$

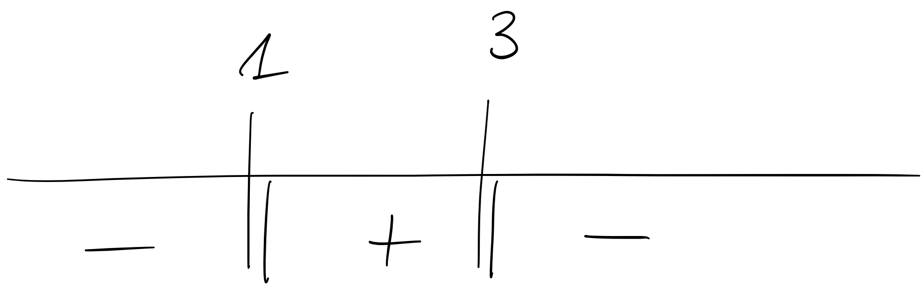
$$= \lim_{x \to \infty} 1 = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{A.H. en } y = 1}$$

$$\delta(x) = f(x) - 1$$

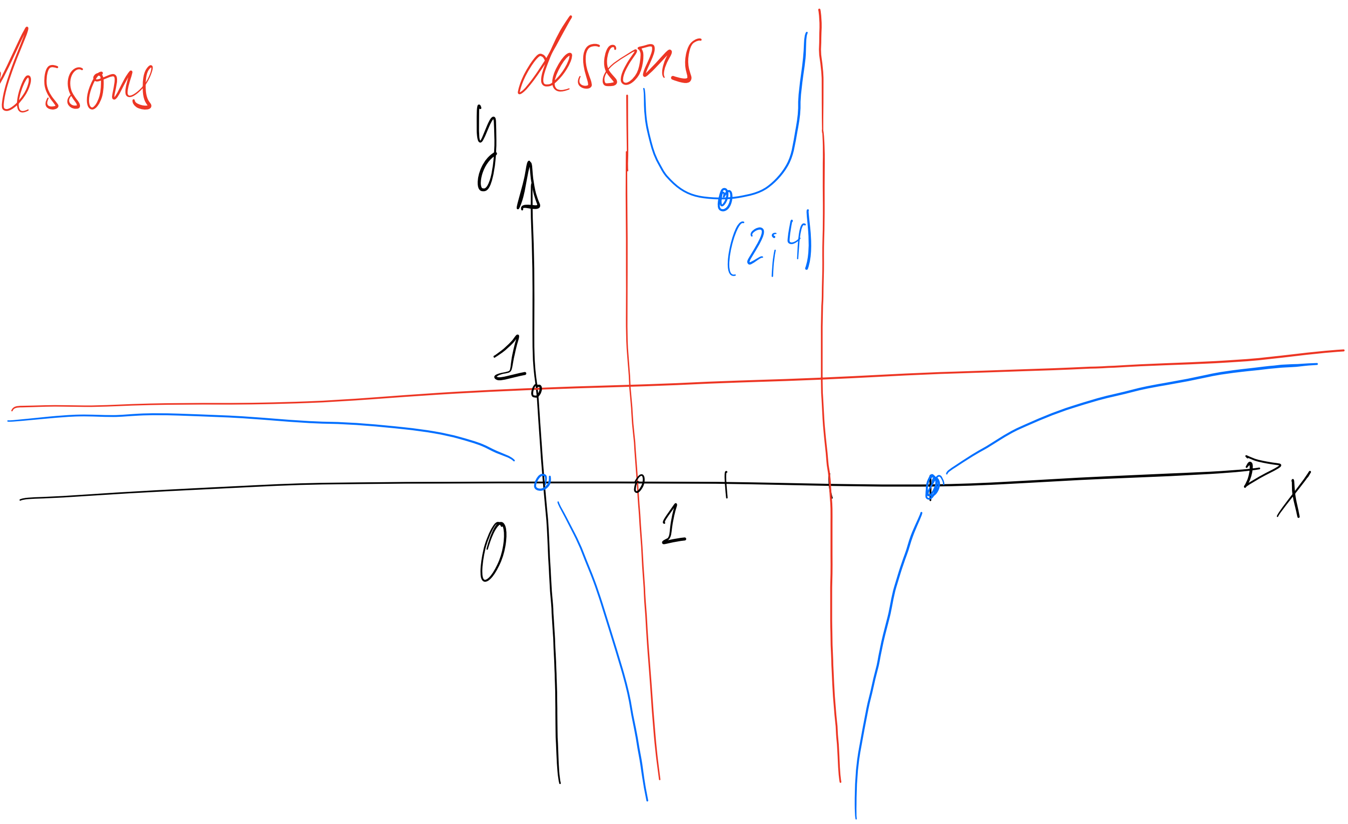
$$= \frac{x^2-4x}{x^2-4x+3} - 1 = \frac{x^2-4x-(x^2-4x+3)}{x^2-4x+3}$$

$$= \frac{-3}{x^2-4x+3} = \frac{-3}{(x-1)(x-3)}$$



dessous

dessous



10)

$$f(x) = \frac{2x-1}{x^2-x-2} = \frac{2x-1}{(x+1)(x-2)}$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{-1 ; 2\}$$

Zéros : $2x-1 = 0 \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

	-1		$0,5$		2	
$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$

$f(0) = \frac{-1}{-2} = 0,5$

$\boxed{\text{Asymptotes}}$

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} \frac{2x-1}{(x+1)(x-2)} = « \frac{-3}{0 \cdot (-3)} »$$

$$= « \frac{-3}{0} » = \infty$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{A.V. en } x = -1}$$

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{2x-1}{(x+1)(x-2)} = « \frac{3}{3 \cdot 0} »$$

$$= « \frac{3}{0} » = \infty$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{A.V. en } x = 2}$$

Vu que degré$(2x-1)$ − degré$(x^2-x-2) = -1$,

on a une $\boxed{\text{A.H. en } y = 0.}$

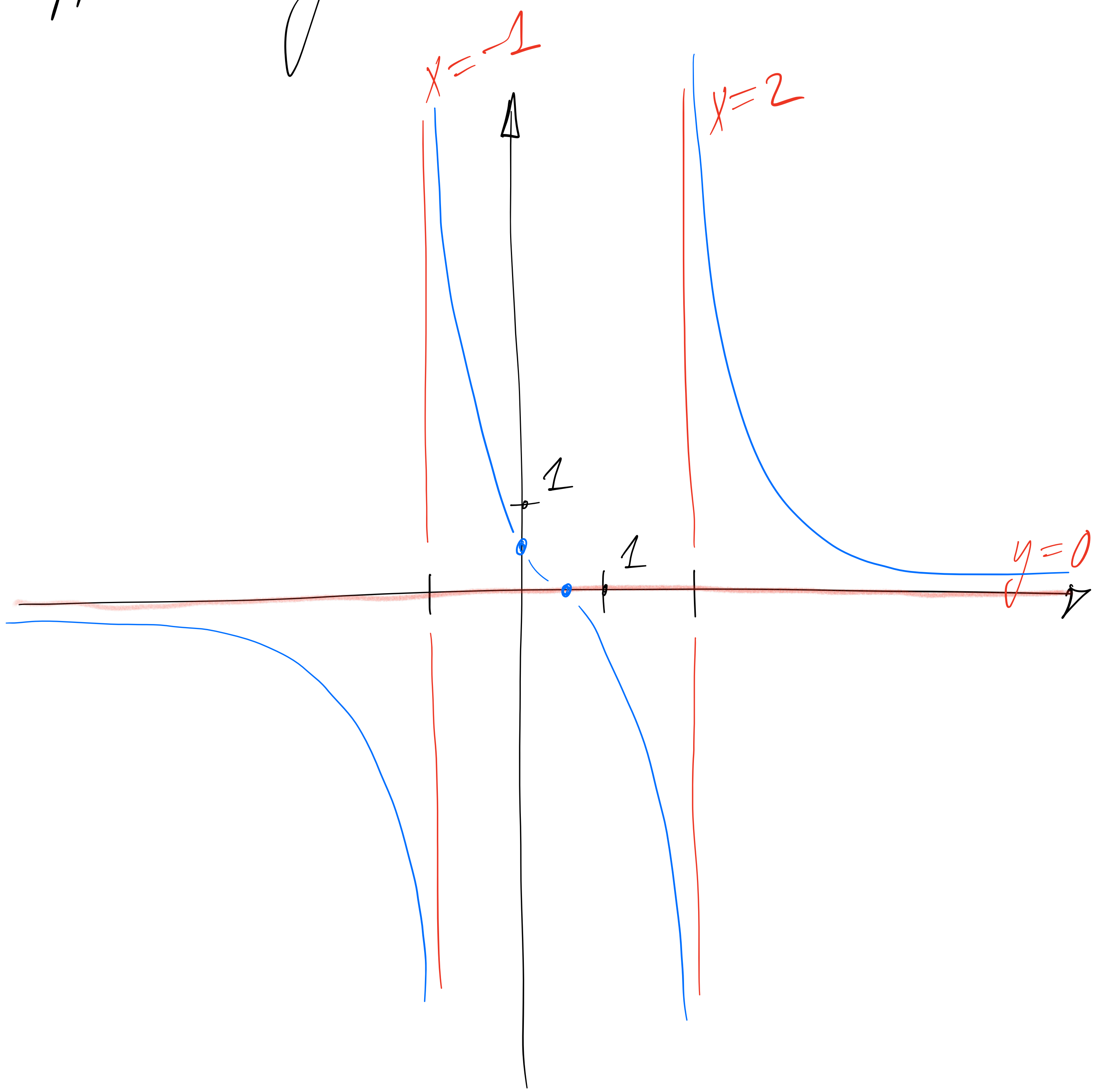
On pourrait aussi calculer

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{2x-1}{x^2-x-2} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{x^2}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{2}{x} = 0,$$

ce qui confirme ce qui a été dit.

$\delta(x) = f(x) - 0 = f(x)$. Le signe de f donne donc la position du graphe par rapport à $y=0$.



11) $f(x) = \dfrac{x^3+2}{x^2+1}$

x		$-1{,}26$	
$f(x)$	$-$	0	$+$

$f(0)=2$

Vu que $x^2+1>0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ $(\Delta = 0^2-4=-4<0)$, il n'y a pas de nombres à exclure: $D_f = \mathbb{R}$

Zéros: $x^3+2=0 \Leftrightarrow x^3=-2 \Leftrightarrow x=\sqrt[3]{-2}$

$\Leftrightarrow x \simeq -1{,}26$

Asymptotes:

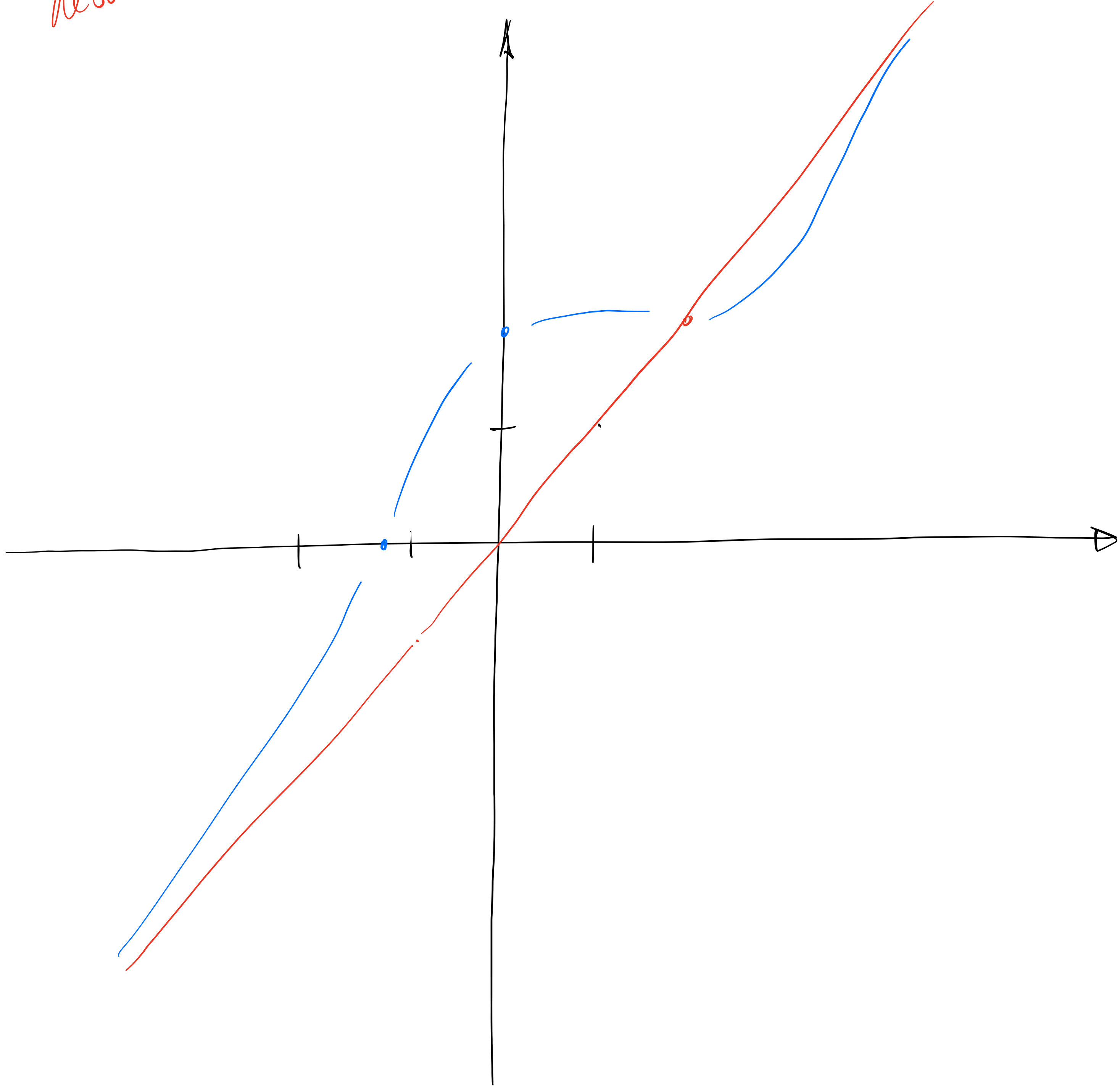
$D_f = \mathbb{R} \Rightarrow \cancel{A.V.}$

$\text{degré}(x^3+2) - \text{degré}(x^2+1) = 1 \Rightarrow A.O.$

$$\begin{array}{l|l} x^3+2 & x^2+1 \\ \cline{2-2} x^3+x & x \\ \hline \quad -x+2 & \end{array} \Rightarrow \frac{x^3+2}{x^2+1} = x + \underbrace{\frac{-x+2}{x^2+1}}_{\delta(x)}$$

$S(x) = 0 \iff x = 2$

		2	
	+	0	−
	dessus		dessous



12) $$f(x) = \frac{x^3+3x^2-22}{2x^2-8}$$

$$f(0) = \frac{22}{8} > 0$$
$$= 2{,}75$$

$$2x^2-8=0 \Leftrightarrow x^2-4=0 \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow x=\pm 2$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{\pm 2\}$$

Zéros: $x^3+3x^2-22=0$

On cherche à factoriser à l'aide d'un schéma de Horner: $D_{22} = \{\pm 1; \pm 2; \pm 11; \ldots\}$

Cela ne fonctionne pas. Par exemple:

	1	3	0	−22
1		1	4	4
	1	4	4	−18

$-18 \neq 0$

Le recours à une machine donne:

$$x^3+3x^2-22=0 \Leftrightarrow x \simeq 2{,}08$$

x		-2		2		$2{,}08$	
	$-$	$\|\|$	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$

Asymptotes

$$\lim_{x\to -2} f(x) = \lim_{x\to -2} \frac{x^3+3x^2-22}{2x^2-8}$$

$$= « \frac{-8+12-22}{0} » = \infty$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{A.V. en } x=-2 \text{ et en } x=2}$$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = « \frac{8+12-22}{0} » = \infty$$

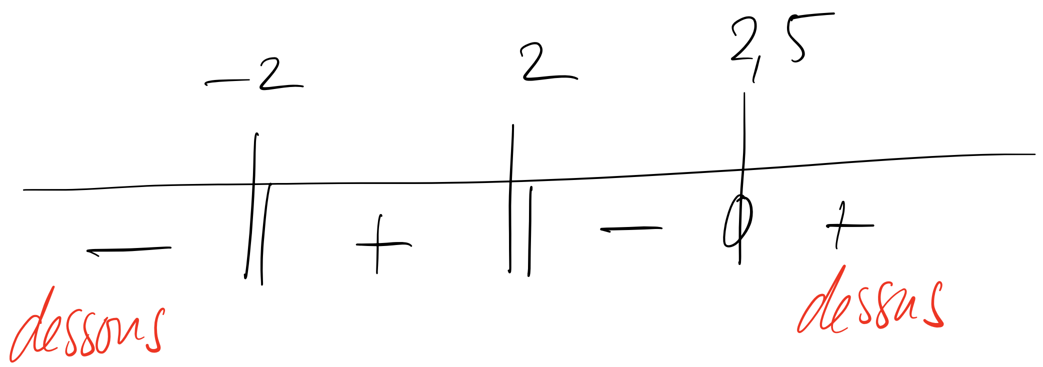
Vu que degré(x^3+3x^2-22) − degré$(2x^2-8) = 1$, on a une asymptote oblique :

$$
\begin{array}{l|l}
x^3+3x^2-22 & 2x^2-8 \\ \cline{2-2}
x^3-4x & \frac{1}{2}x+\frac{3}{2} \\ \cline{1-1}
\quad 3x^2+4x-22 & \\
\quad 3x^2-12 & \\ \cline{1-1}
\qquad 4x-10 &
\end{array}
$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^3+3x^2-22}{2x^2-8} = \frac{1}{2}x+\frac{3}{2}+\underbrace{\frac{4x-10}{2x^2-8}}_{\delta(x)}$$

Le signe de δ donne la position du graphe par rapport à son asymptote.

$S(x) = 0 \Leftrightarrow 4x - 10 = 0 \Leftrightarrow x = 2{,}5$



$S(0) = \frac{-10}{-8} = 1{,}25 > 0$