Soit $P(X)$ et $Q(X)$ deux polynômes.

$\exists$ $B(X)$ et $R(X)$ deux polynômes tq.

$$P(X) = Q(X) \cdot B(X) + R(X)$$

avec $\deg(R(X)) < \deg(Q(X))$

<u>Exemple:</u> $P(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \quad Q(X) = (X-a)$

$\Rightarrow \exists$ $R(X)$ tq. $P(X) = (X-a) \cdot B(X) + R(X)$

Vu que $\deg(R(X)) < \deg(X-a) = 1$, $R(X) = R \in \mathbb{R}$

Ainsi $P(X) = (X-a) \cdot B(X) + R$, avec $R \in \mathbb{R}$.

<u>Conséquence:</u> $P(a) = (a-a) \cdot B(a) + R$

$$= 0 \cdot B(a) + R = R.$$

$\Rightarrow$ $P(a)$ est le reste de la division euclidienne de $P(x)$ par $(x-a)$.

$\Rightarrow$ $P(a) = 0 \Leftrightarrow R = 0 \Leftrightarrow (x-a) \mid P(x)$.

CQFD

$\boxed{\text{Schéma de Horner}}$

$$P(x) = 3x^5 - 2x^4 + x^2 - 3x + 1$$

$$a = -2$$

$$x - a = x + 2$$

	3	−2	0	1	−3	1
−2		−6	16	−32	62	−118
	3	−8	16	−31	59	−117

$$P(x) = (x+2)(3x^4 - 8x^3 + 16x^2 - 31x + 59) - 117$$

et $P(-2) = 3(-2)^5 - 2(-2)^4 + (-2)^2 - 3(-2) + 1 = -117$

<u>Résultat:</u> Soit $a \in \mathbb{Z}$ et $P(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$, $a_i \in \mathbb{Z}$ $\forall i$

$$P(a) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad (X-a) \mid P(X)$$

$$\Longrightarrow \quad a \mid a_0$$

terme constant

$$P(X) = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n$$

<u>preuve:</u> $P(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \ldots + a_n X^n$

$$P(a) = 0 \Rightarrow a_0 + a_1 \cdot a + a_2 \cdot a^2 + \ldots + a_n \cdot a^n = 0$$

$$\Rightarrow a_0 = a \cdot (-a_1) + a(-a_2 a) + a \cdot (-a_3 a^2) + \ldots$$

$$\ldots + a \cdot (-a_n \cdot a^{n-1})$$

$$\Rightarrow a_0 = a \cdot \left[-a_1 - a_2 a - a_3 a^2 + \ldots - a_n a^{n-1} \right]$$

$$\Rightarrow a_0 = a \cdot b \quad \text{avec } b \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow a \mid a_0 \qquad \text{CQFD}$$

Technique de factorisation pour les polynômes à coefficients entiers :

1. Établir la liste des diviseurs du terme constant.

2. À l'aide d'un schéma de Horner, calculer $P(d)$ pour tout d dans la liste établie au point 1.
Si $P(d) = 0$, revenir au point 1 en prenant le quotient de la division par $(X-d)$ comme « nouveau polynôme ».

Exemple: Factoriser $3x^5-2x^4+x^2-3x+1$

$D_1 = \{\pm 1\}$

	3	-2	0	1	-3	1
1		3	1	1	2	-1
	3	1	1	2	-1	0
1		3	4	5	7	
	3	4	5	7	~~6~~	

$(x-1) \mid P(x)$

	3	1	1	2	-1
-1		-3	2	-3	1
	3	-2	3	-1	0

$(x+1) \mid P(x)$

$$\Rightarrow \quad x^5 - 2x^4 + x^2 - 3x + 1 = (x+1)(x-2)(3x^3 - 4x^2 + 3x - 1)$$

$\rightarrow$