$\boxed{\text{Produit scalaire}}$

Vecteurs

Algèbre linéaire

$\vec{a}$ et $\vec{b}$ deux vecteurs

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

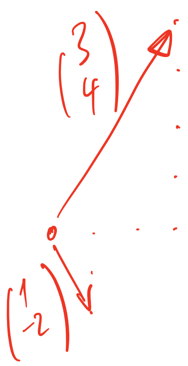
gros point, pour désigner le <u>produit scalaire</u>.

$$(\vec{a}, \vec{b}) \rightsquigarrow \text{nombre}$$

couple de vecteurs

<u>Exemple:</u>

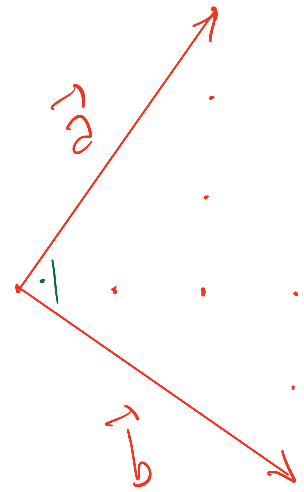
$$\boxed{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}} = 3 \cdot 1 + 4 \cdot (-2) = 3 - 8$$
$$= -5$$



$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$$

$\vec{a} = \begin{array}{cl} \left(\begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix}\right) & \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \end{matrix} \end{array} \qquad \vec{b} = \begin{array}{cl} \left(\begin{matrix} 3 \\ -2 \end{matrix}\right) & \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \end{matrix} \end{array} \qquad \vec{a} \perp \vec{b}$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 = 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-2)$



angle $(\vec{a}\,; \vec{b}) = 0$

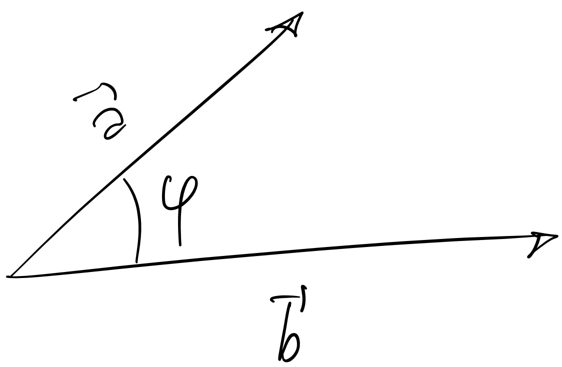
<u>Prop.</u> Soit $\vec{a}, \vec{b}$ deux vecteurs (plan/espace)

$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

<u>Exemple:</u> $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

$\vec{x} \perp \vec{y} \Leftrightarrow x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = 0 = \vec{x} \cdot \vec{y}$

Soit $\vec{a}, \vec{b}$ deux vecteurs



φ phi

$$\cos(\varphi) = \frac{|\vec{a} \bullet \vec{b}|}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|}$$

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a} \bullet \vec{a}} = \sqrt{a_1 \cdot a_1 + a_2 \cdot a_2}$$

$$= \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

Définition: Soit $x = (x_1; \dots; x_n)$ et $y = (y_1; \dots; y_n)$ deux vecteurs avec $n=2$ ou $n=3$.

Le produit scalaire de x par y se définit comme suit:

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + \dots + x_n y_n$$

Exemple:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

Prop. Soit $\vec{a}$ et $\vec{b}$ deux vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^2$. On a

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

preuve: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0$$

Vu que $\vec{b} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, on doit avoir $b_1 \neq 0$ ou $b_2 \neq 0$.

$\boxed{1^{er} \text{ cas} : b_1 \neq 0}$

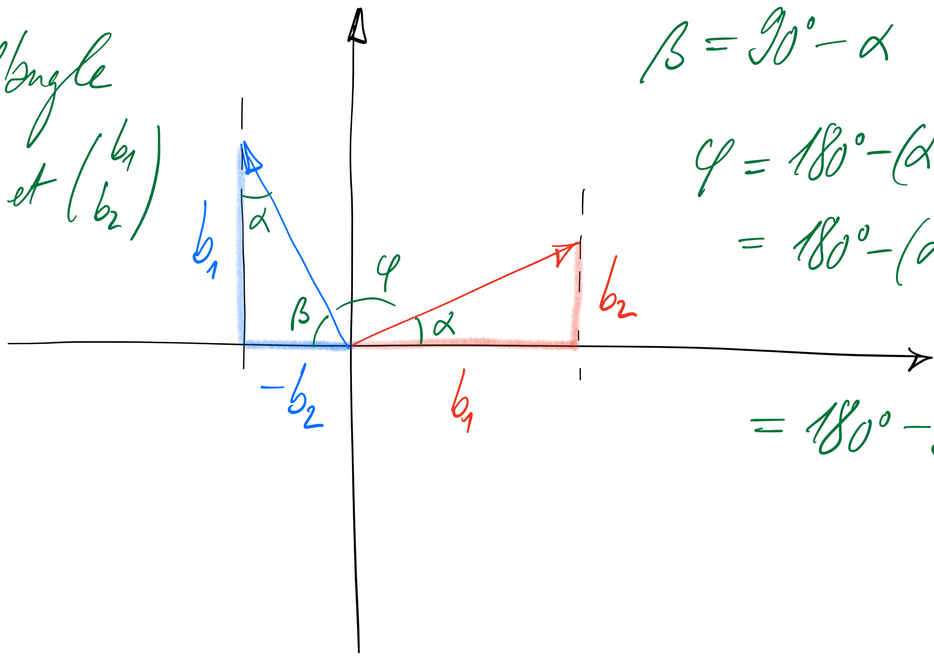
$$\left.\begin{aligned} a_1 b_1 &= -a_2 b_2 \\ a_1 &= -a_2 \frac{b_2}{b_1} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{a} = \begin{pmatrix} -a_2 \cdot \dfrac{b_2}{b_1} \\ a_2 \end{pmatrix} = \frac{a_2}{b_1} \begin{pmatrix} -b_2 \\ b_1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Les vecteurs $\vec{a}$ et $\begin{pmatrix} -b_2 \\ b_1 \end{pmatrix}$ sont colinéaires.

$\Rightarrow$ L'angle entre $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est le même que l'angle entre $\begin{pmatrix} -b_2 \\ b_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$.

Illustrons la situation :

Soit φ l'angle entre $\begin{pmatrix} -b_2 \\ b_1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$



$\beta = 90° - \alpha$

$$\begin{aligned} \varphi &= 180° - (\alpha + \beta) \\ &= 180° - (\alpha + 90° - \alpha) \\ &= 180° - 90° = 90° \end{aligned}$$

Le résultat est démontré dans le 1^{er} cas.

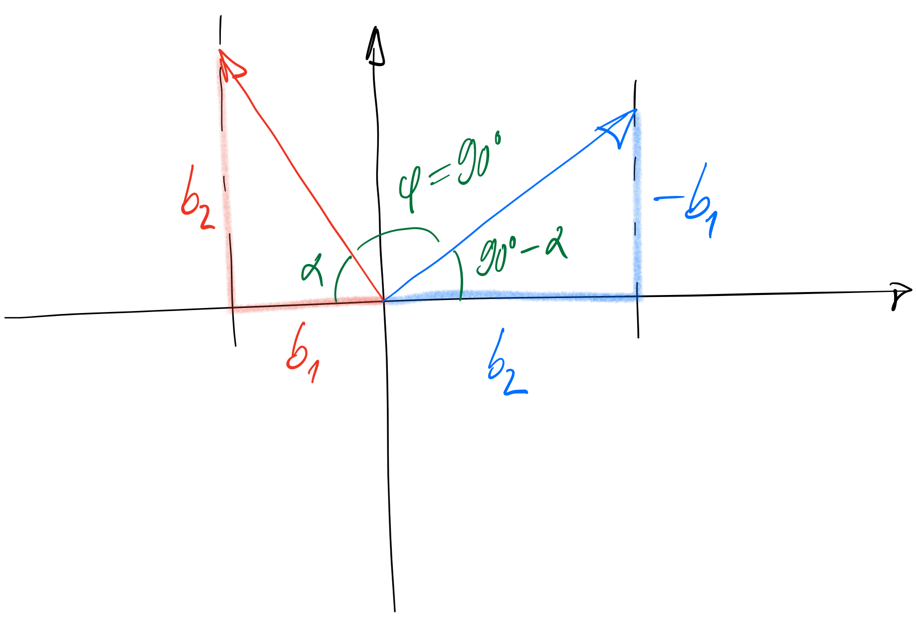
$\boxed{2^{\text{ème}} \text{ cas : } b_2 \neq 0}$

$$\left.\begin{array}{l} a_2 b_2 = -a_1 b_1 \\ \Rightarrow \quad a_2 = -a_1 \cdot \dfrac{b_1}{b_2} \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ -a_1 \dfrac{b_1}{b_2} \end{pmatrix} = \frac{a_1}{b_2} \begin{pmatrix} b_2 \\ -b_1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Les vecteurs $\vec{a}$ et $\begin{pmatrix} b_2 \\ -b_1 \end{pmatrix}$ sont colinéaires.

$\Rightarrow$ L'angle entre $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est le même que l'angle entre $\begin{pmatrix} b_2 \\ -b_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{b}$.

On peut raisonner géométriquement sur la figure ci-dessous et conclure par un argument analogue à celui donné pour le 1er cas.

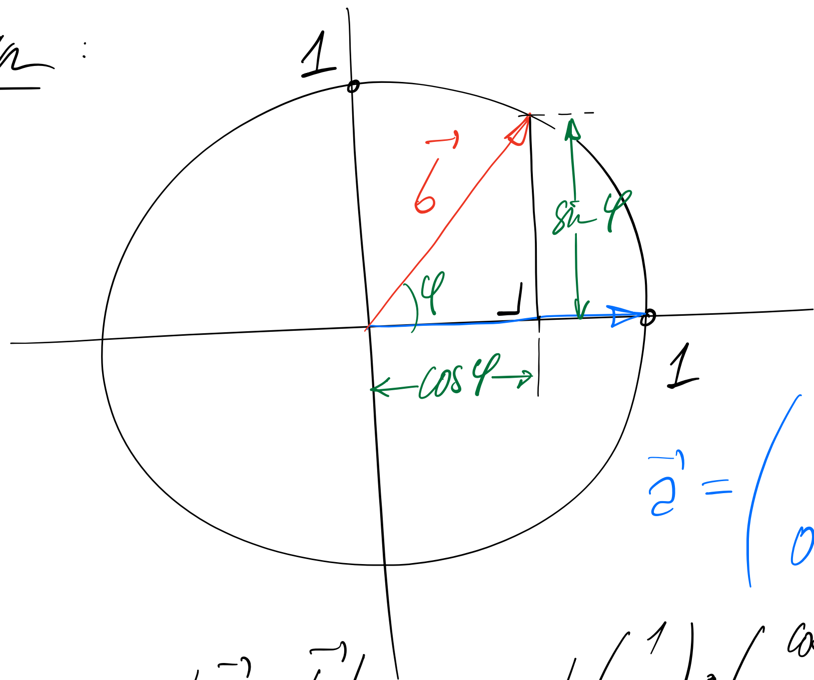


CQFD

Définition: L'angle aigu formé par deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est donné par la formule :

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|} = \left|\left(\frac{1}{\|\vec{a}\|}\cdot\vec{a}\right)\cdot\left(\frac{1}{\|\vec{b}\|}\cdot\vec{b}\right)\right|$$

Justification:



$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}\right|}{1\cdot 1} = \frac{|\cos\varphi|}{1} = \cos\varphi$$

Déf. Soit $x\in\mathbb{R}$. On définit la <u>valeur absolue</u> de x comme suit :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x\geq 0 \\ -x & \text{sinon} \end{cases}$$

Dim 2

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} \overset{\text{def}}{=} a_1 b_1 + a_2 b_2}$$

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$$

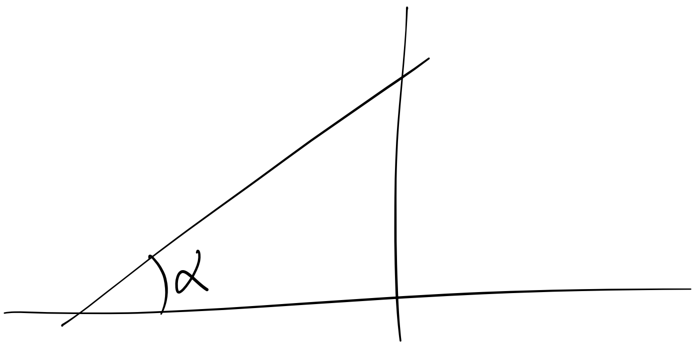
$$\cos\varphi = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|}$$

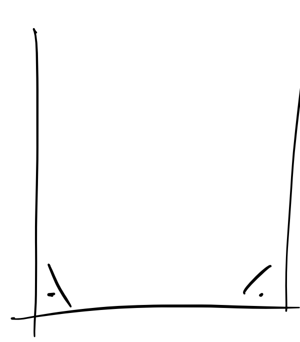
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

déf. $$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{sinon} \end{cases}$$

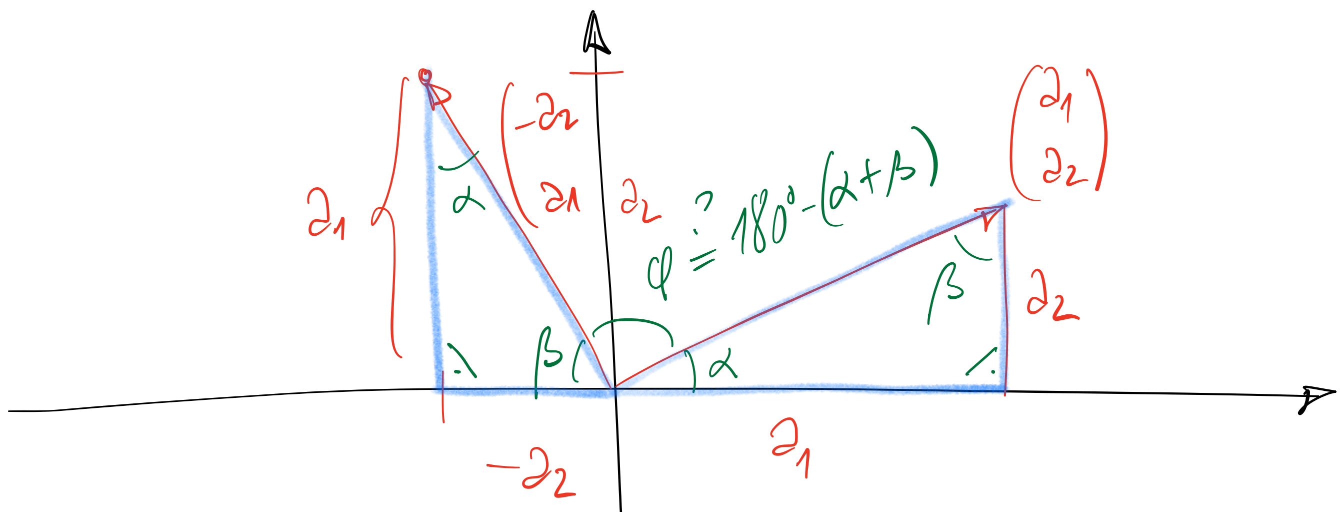
Valeur absolue de x

« virer le signe »





$\cos 90° = 0$



2 Δ isométriques :

$\beta = 90° - \alpha$

$\varphi = 180° - (\alpha + 90° - \alpha)$

$= 180° - 90° = 90°$

$a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0$

$a_1 b_1 = -a_2 b_2$

$\longrightarrow$ Mardi 18 nov : 1.4.10

1.4.11

1.4.11

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\vec{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\vec{a} + k\vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} kb_1 \\ kb_2 \\ kb_3 \end{pmatrix}$$

$k \in \mathbb{R}$

k est un scalaire

k est un nombre

$$= \begin{pmatrix} a_1 + kb_1 \\ a_2 + kb_2 \\ a_3 + kb_3 \end{pmatrix}$$

$$(\vec{a} + k \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$$

$$(a_1 + kb_1) \cdot c_1 + (a_2 + kb_2) \cdot c_2 + (a_3 + kb_3) \cdot c_3 = 0$$