

Proposition: Soit $2 \in \mathbb{N}$, $2 > 1$ un nombre qui n'est pas un carré parfait.

Soit encore x le plus grand entier tel que $x^2 < 2$.

Soit $d \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ le plus grand chiffre tel que

$$(20 \cdot x + d) \cdot d < (2 - x^2) \cdot 100$$

Alors d est le premier chiffre du développement décimal de la racine de 2:

$$x + \frac{d}{10} \simeq \sqrt{2}$$

Preuve: $(20x + d) \cdot d < (2 - x^2) \cdot 100$

$$\Leftrightarrow 20xd + d^2 < (2 - x^2) \cdot 100$$

$$\Leftrightarrow \frac{20xd}{100} + \frac{d^2}{100} < 2 - x^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{2 \cdot x \cdot 10d}{100} + \left(\frac{d}{10}\right)^2 < 2 - x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{d}{10} + \left(\frac{d}{10}\right)^2 < 2$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{d}{10}\right)^2 < 2$$

Ce qui fait que $x + \frac{d}{10}$ est le plus grand code décimal à 1 chiffre dont le carré est strictement inférieur à 2.

CAED