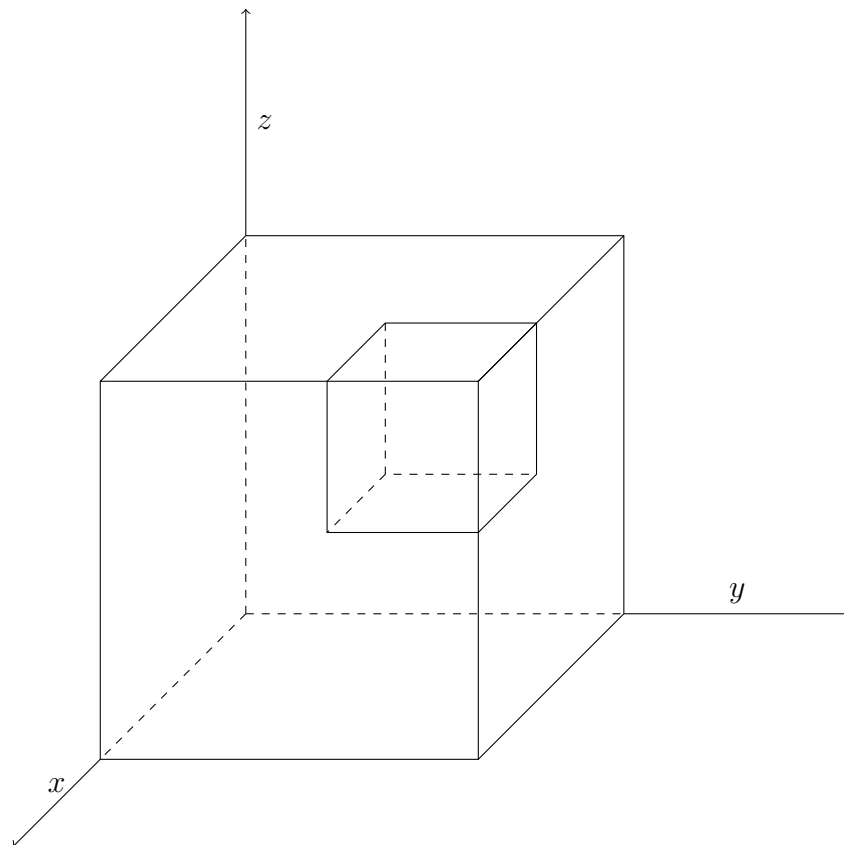


---

# Introduction à la géométrie en 3D

## Perspectives et sections dans le cube

---



# Table des matières

|          |                                                     |           |
|----------|-----------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Éléments de géométrie de l'espace</b>            | <b>3</b>  |
| <b>2</b> | <b>L'esquisse en 3D</b>                             | <b>12</b> |
| <b>3</b> | <b>Sections dans le cube</b>                        | <b>25</b> |
| <b>4</b> | <b>Axiomes de la géométrie de l'espace</b>          | <b>46</b> |
| 4.1      | Axiomes sur les points, droites et plans . . . . .  | 46        |
| 4.2      | Parallélisme et perpendicularité . . . . .          | 46        |
| 4.3      | Axiomes métriques (géométrie euclidienne) . . . . . | 46        |

# 1. Éléments de géométrie de l'espace

**Exercice 1.1**

Représenter une figure formée par trois plans ayant :

- a) aucun point commun ;
- b) un seul point commun ;
- c) une droite commune.

**Exercice 1.2**

Représenter une figure formée par :

- a) une droite coupant un plan ;
- b) une droite parallèle à un plan ;
- c) une droite perpendiculaire à un plan.

**Exercice 1.3**

Représenter une figure formée par :

- a) une droite coupant deux plans sécants ;
- b) une droite parallèle à deux plans sécants ;
- c) une droite ne coupant qu'un des deux plans sécants.

**Exercice 1.4**

Représenter une figure permettant de visualiser les propriétés suivantes.

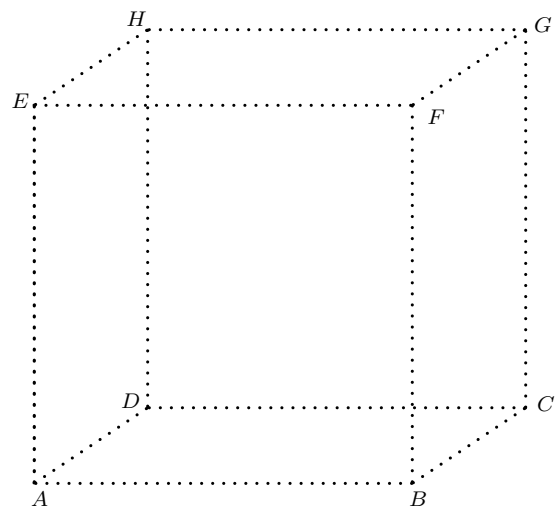
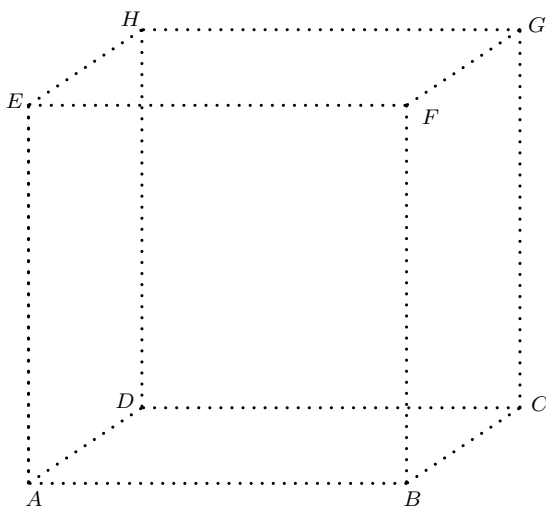
- a) Une droite passant par deux points d'un plan est entièrement contenue dans ce plan.
- b) Si deux plans se coupent, ils se coupent suivant une droite appelée **trace**.
- c) Si deux droites se coupent et sont contenues dans des plans distincts, leur point d'intersection appartient à la trace des deux plans.
- d) Tout plan coupant deux plans parallèles détermine deux traces parallèles.

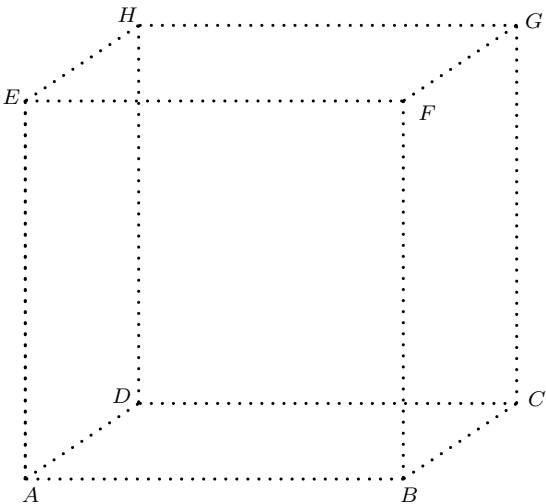
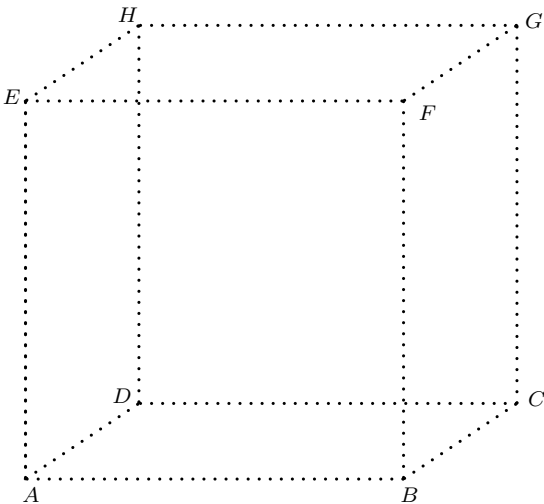
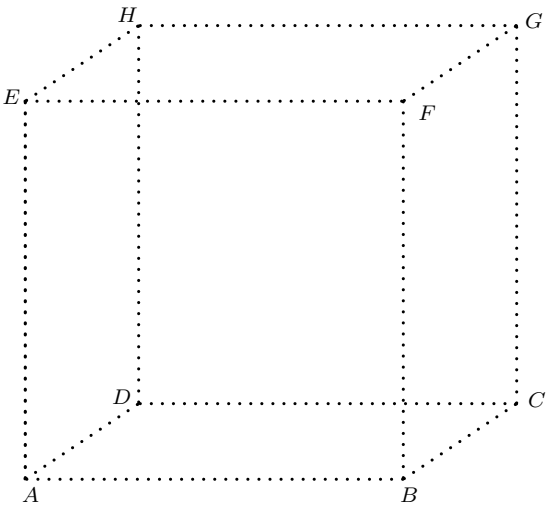
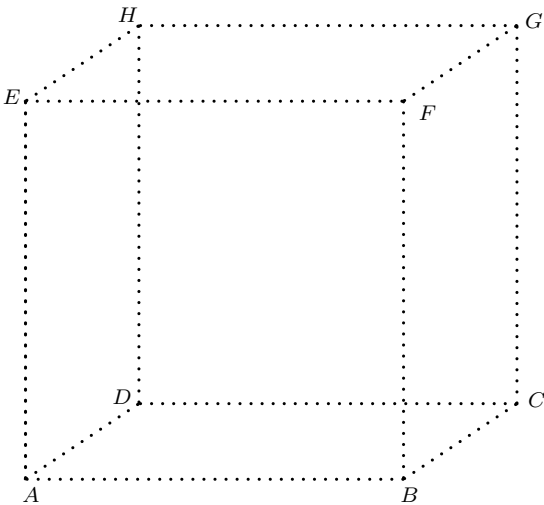
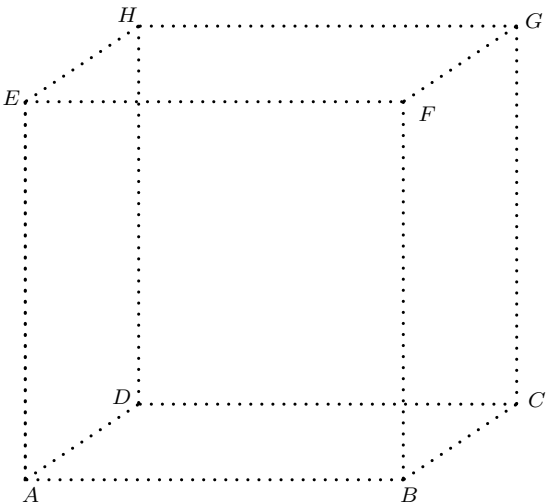
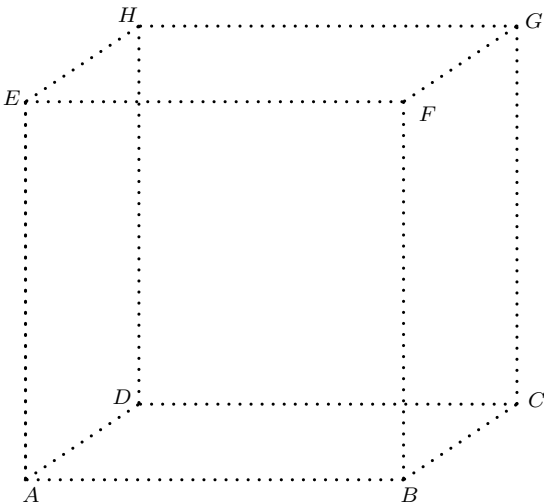
- e) Deux plans sont parallèles si l'un contient deux droites sécantes respectivement parallèles à deux droites sécantes de l'autre.
- f) Soit une droite  $d$  parallèle à un plan  $\pi$  et soit un plan  $\alpha$  passant par  $d$  et coupant  $\pi$  suivant une droite  $i$ . La droite  $i$  est parallèle à la droite  $d$ .
- g) La projection d'une droite sur un plan est une droite, sauf dans le cas où la droite est perpendiculaire au plan.
- h) Deux plans sont perpendiculaires si l'un d'eux contient une droite perpendiculaire à l'autre.

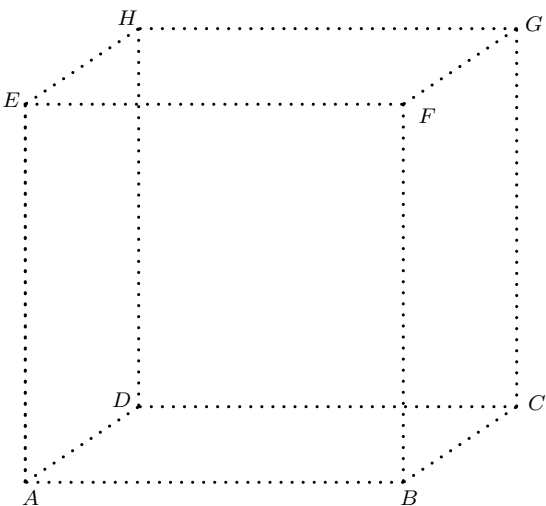
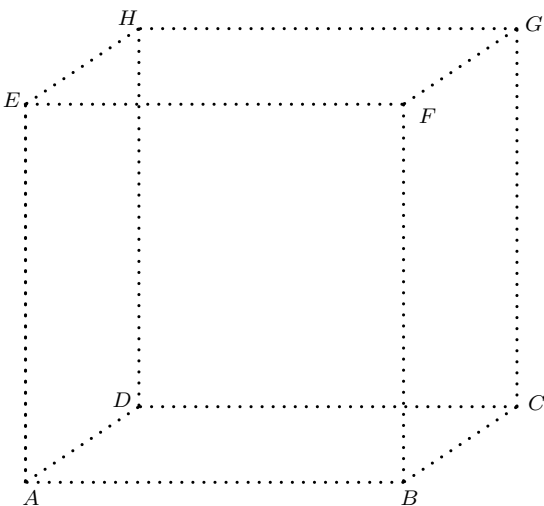
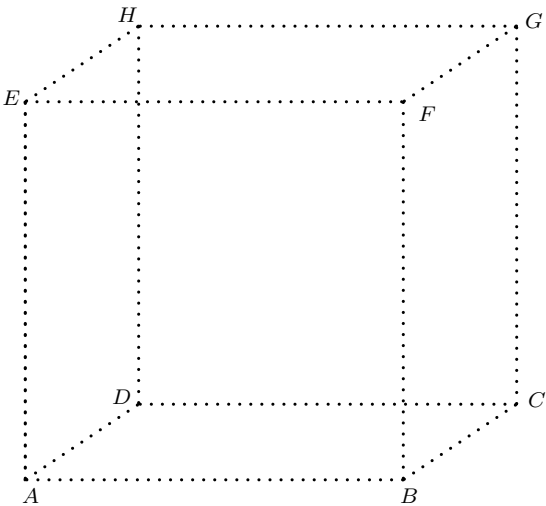
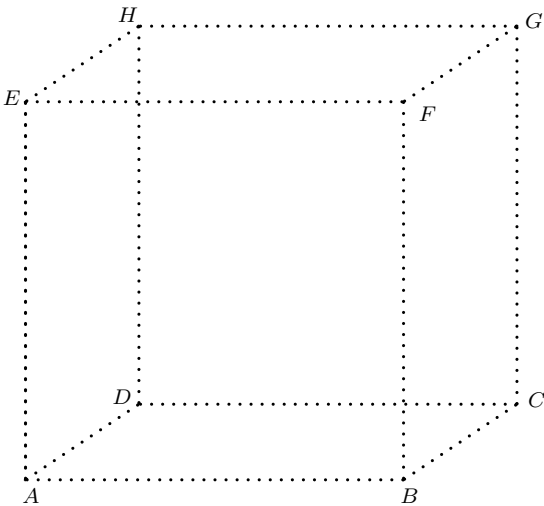
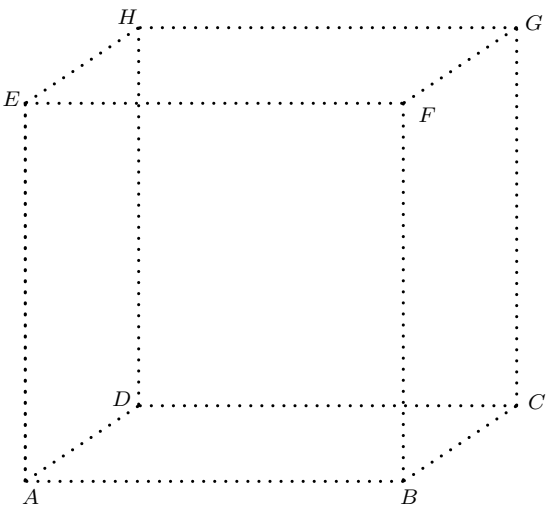
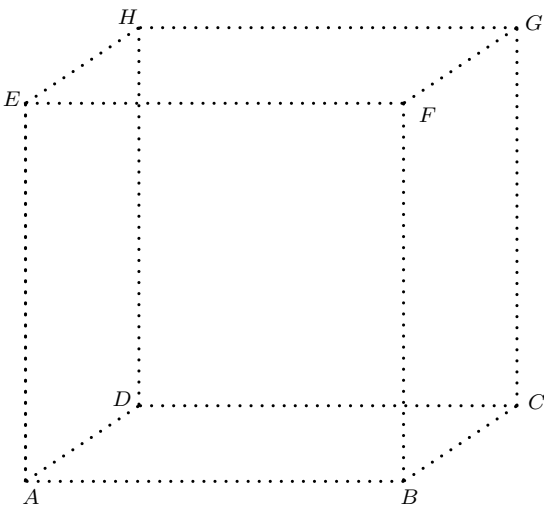
**Exercice 1.5**

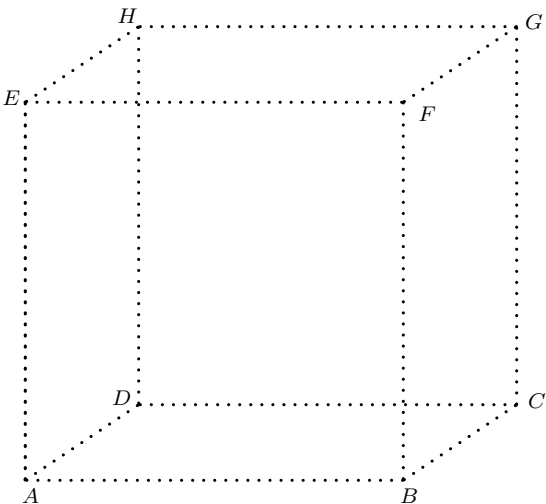
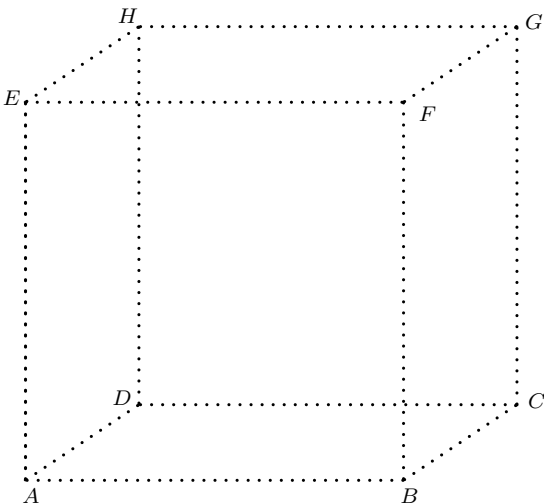
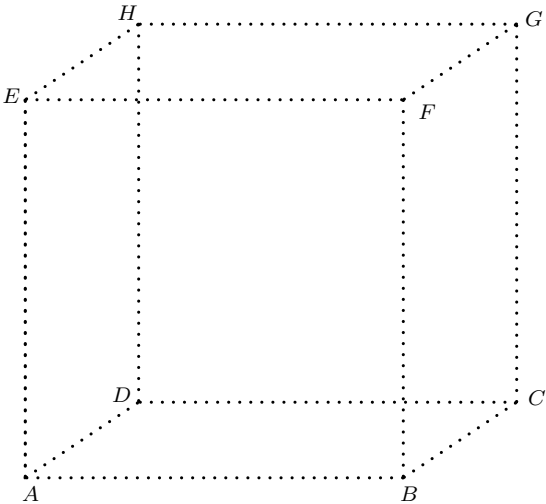
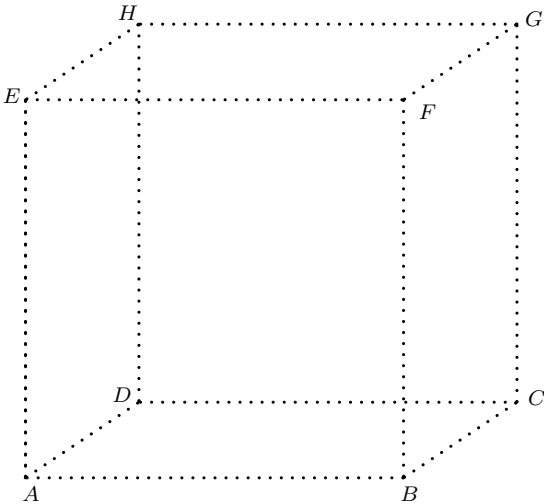
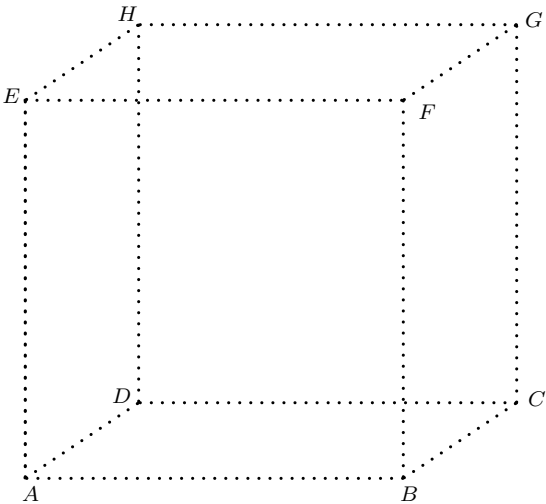
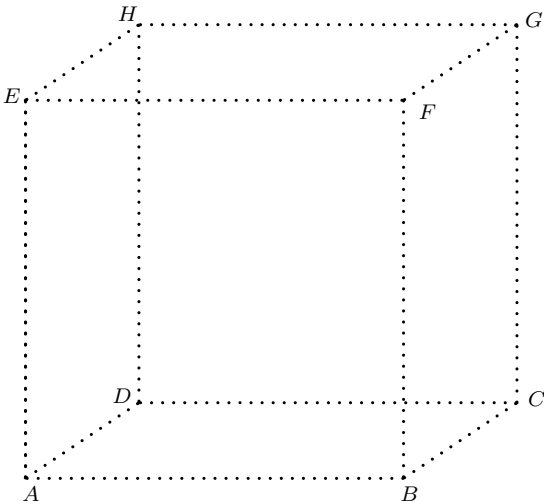
Dans un cube  $ABCDEFGH$ , représenter :

- a) deux droites sécantes et leur intersection ;
- b) deux droites gauches ;
- c) deux droites perpendiculaires et leur intersection ;
- d) quatre droites sécantes en un point ;
- e) deux plans parallèles ;
- f) deux plans perpendiculaires et leur trace ;
- g) deux plans non perpendiculaires et sécants et leur trace ;
- h) une droite sécante à deux plans parallèles ;
- i) quatre points qui forment un tétraèdre ;
- j) quatre points qui forment un tétraèdre régulier ;
- k) quatre points qui forment un rectangle qui n'est pas un carré ;
- l) six points sur les arêtes qui forment un hexagone régulier ;
- m) peut-on placer cinq points sur les arêtes qui forment un pentagone régulier ?
- n) huit points qui forment un octaèdre régulier.





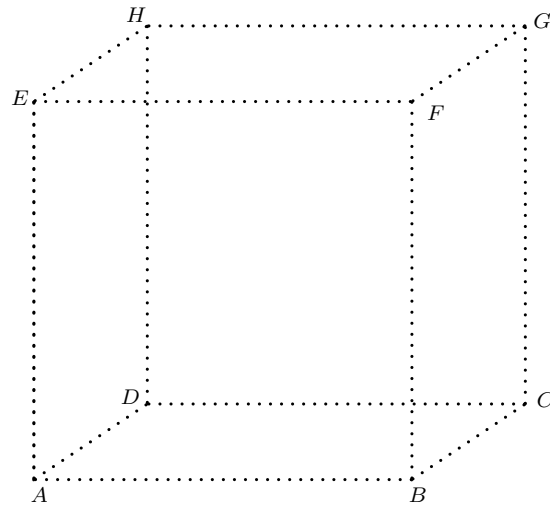
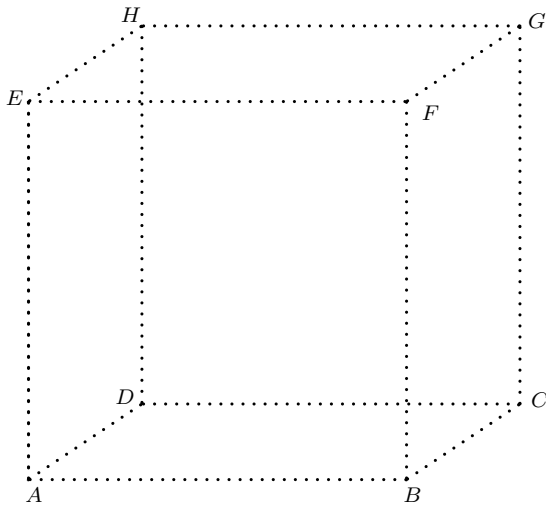




## 2. L'esquisse en 3D

### Exercice 2.1

- Combien de plans différents sont formés par les points  $E$ ,  $F$ ,  $G$  et  $C$  ?
- Combien de plans différents sont formés par les points  $E$ ,  $F$ ,  $D$  et  $C$  ?
- Quel est le nom de la figure formée par ces 4 points ?

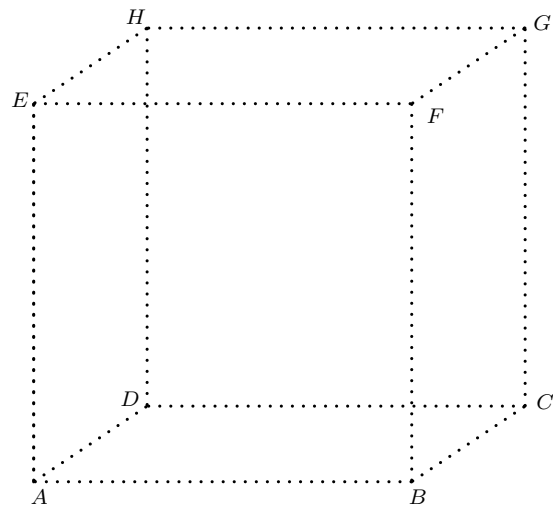
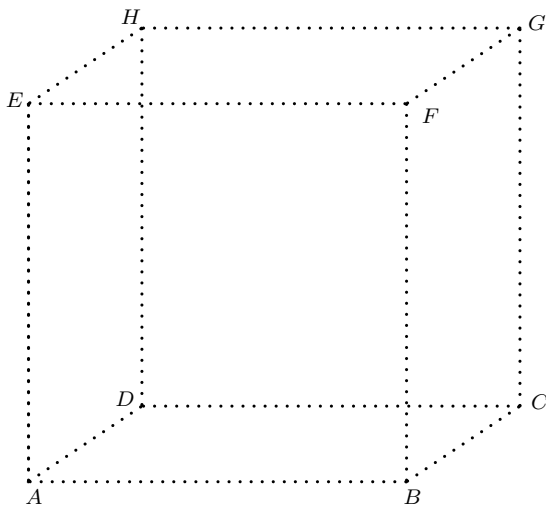


Remarques:

- Trois points non alignés définissent un plan.
- Quatre points sont dits coplanaires s'ils sont contenus dans un même plan.

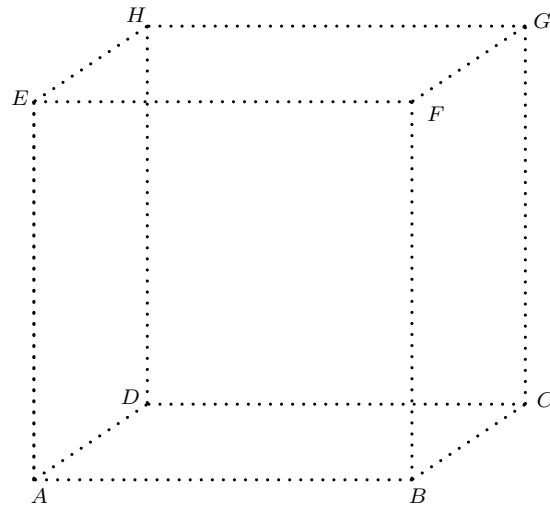
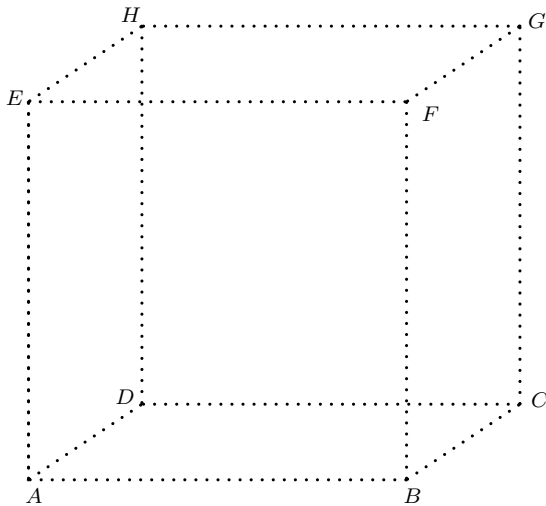
### Exercice 2.2

- Combien de plans différents sont formés par les points  $H$ ,  $F$ ,  $A$  et  $C$  ?
- Combien de plans différents sont formés par les points  $E$ ,  $G$ ,  $C$  et  $A$  ?



**Exercice 2.3**

- a) Les droites portées par les segments  $AF$  et  $DG$  sont-elles coplanaires ?  
Préciser dans ce cas si elle sont parallèles ou sécantes.
- b) Les droites portées par les segments  $HF$  et  $BG$  sont-elles coplanaires ?  
Préciser dans ce cas si elle sont parallèles ou sécantes.

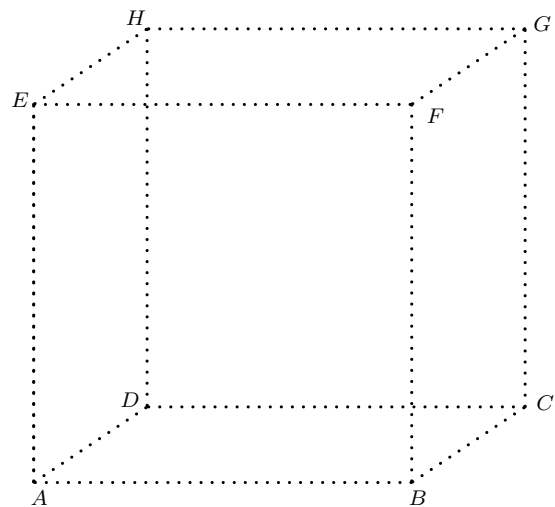
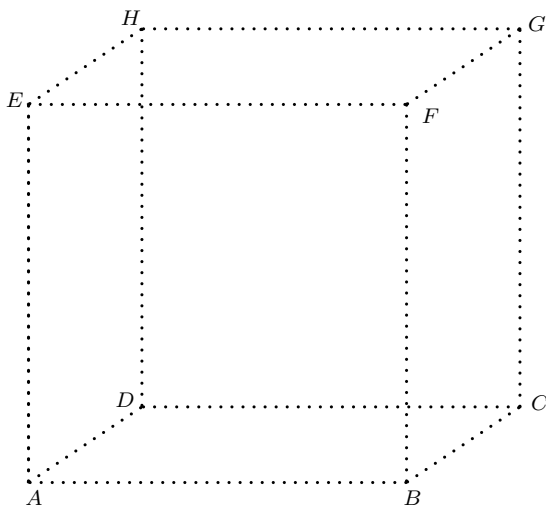


Remarques:

- Deux droites sont coplanaires  $\Leftrightarrow$  elles sont confondues ou sécantes ou parallèles.
- Deux droites sont dites gauches si elles ne sont pas contenues dans un même plan.

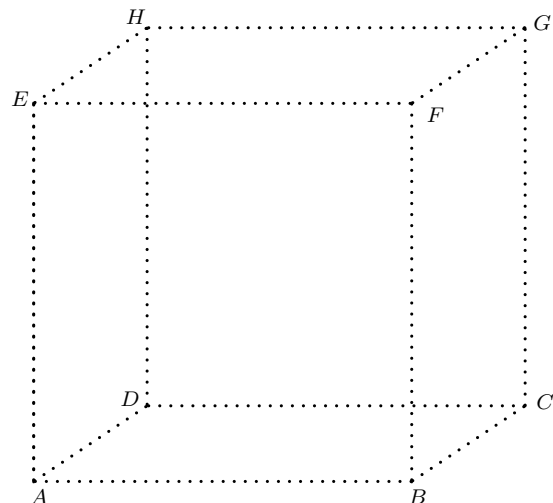
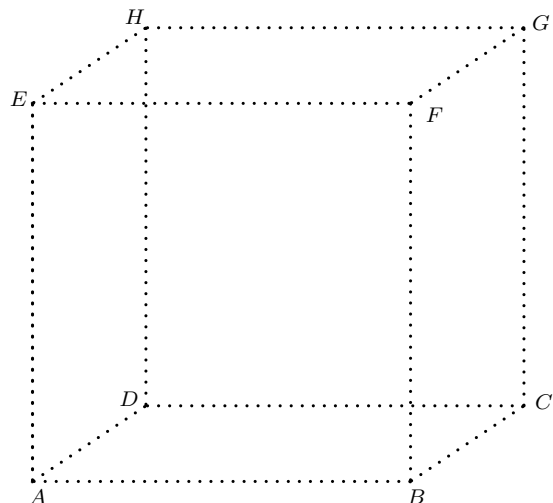
**Exercice 2.4**

- a) Les droites portées par les segments  $AF$  et  $HF$  sont-elles coplanaires ?  
Préciser dans ce cas si elle sont parallèles ou sécantes.
- b) Les droites portées par les segments  $HB$  et  $AG$  sont-elles coplanaires ?  
Préciser dans ce cas si elle sont parallèles ou sécantes.

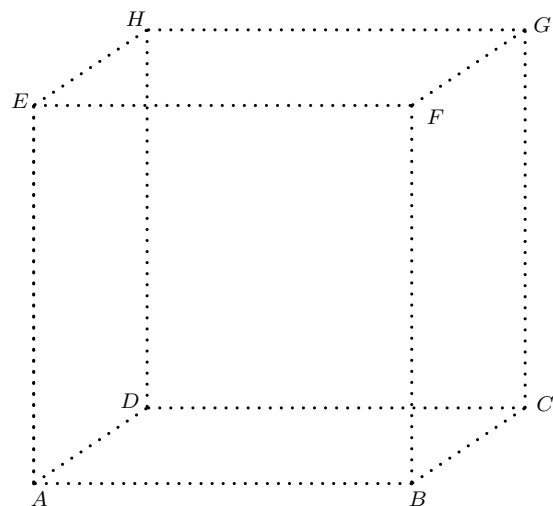
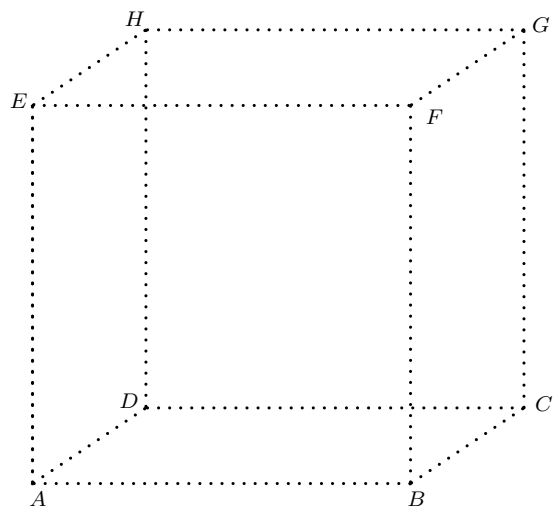


**Exercice 2.5**

- a) Construire l'intersection du plan  $\alpha = (AFG)$  et du plan  $\beta = (CDG)$ .  
 b) Construire l'intersection du plan  $\alpha = (DEG)$  et du plan  $\beta = (ABG)$ .

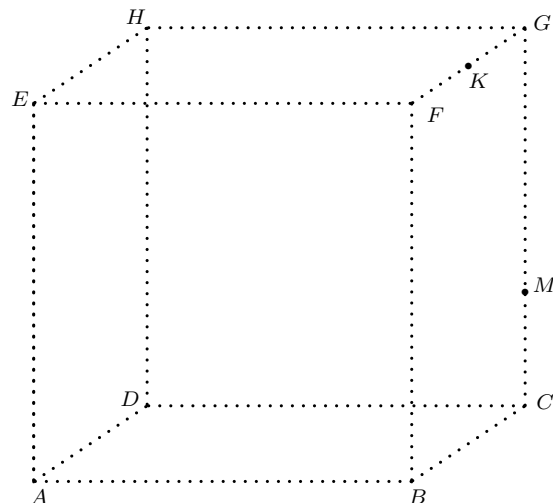
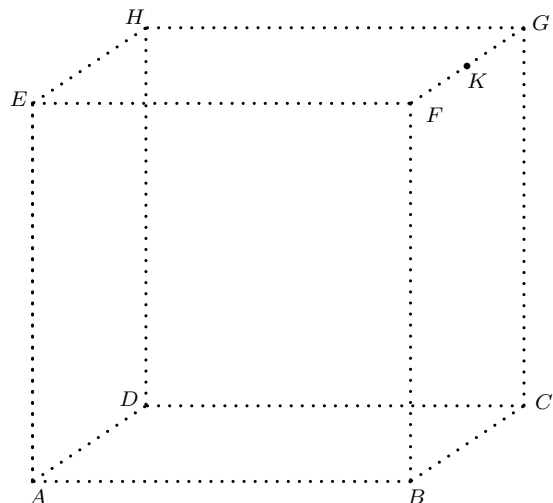
**Exercice 2.6**

- a) Construire l'intersection du plan  $\alpha = (AFH)$  et du plan  $\beta = (ACF)$ .  
 b) Construire l'intersection du plan  $\alpha = (AFH)$  et du plan  $\beta = (DCF)$ .



**Exercice 2.7**

- a) Dessiner l'intersection du plan  $ECK$  avec le cube.  
 b) Dessiner l'intersection du plan  $EKM$  avec le cube.

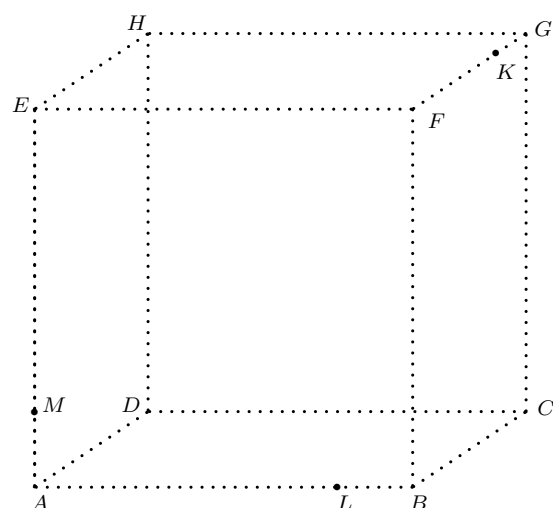
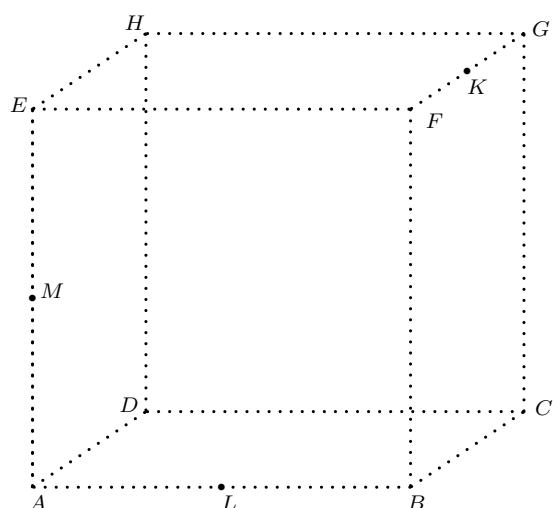


Remarques:

- Tout plan coupant deux plans parallèles y détermine des droites d'intersection parallèles.
- Respecter la visibilité dans le codage des traces du plan ABC sur les faces du cube.

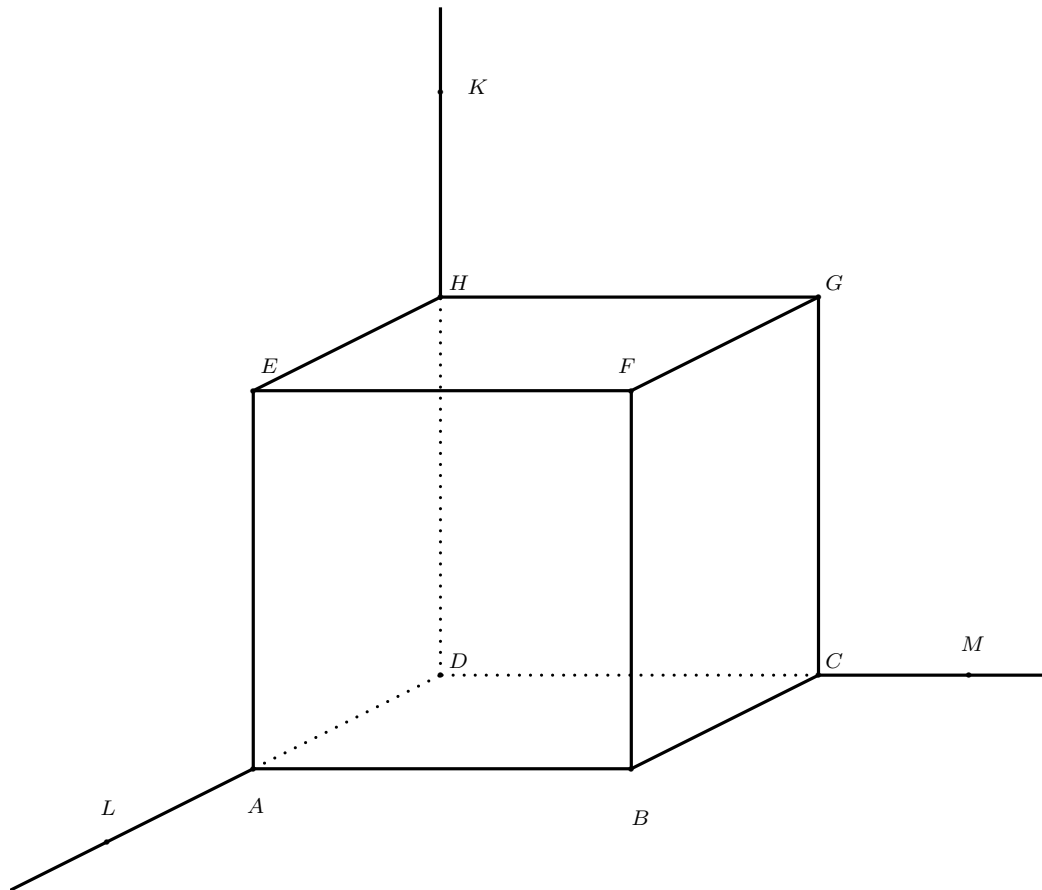
**Exercice 2.8**

Dessiner l'intersection du plan  $MLK$  avec le cube.



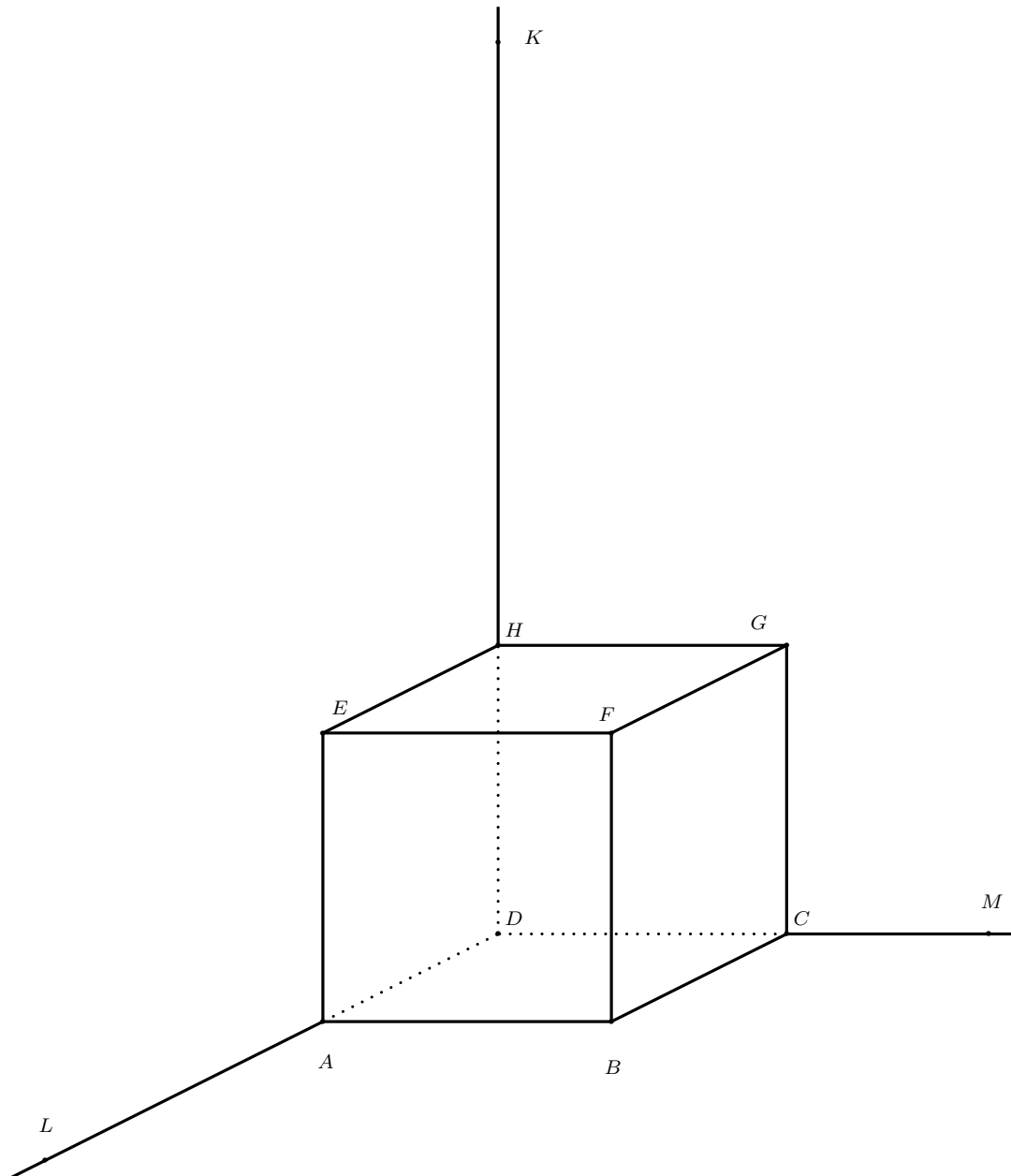
**Exercice 2.9**

Construire avec visibilité l'intersection du cube avec le plan  $KLM$ .



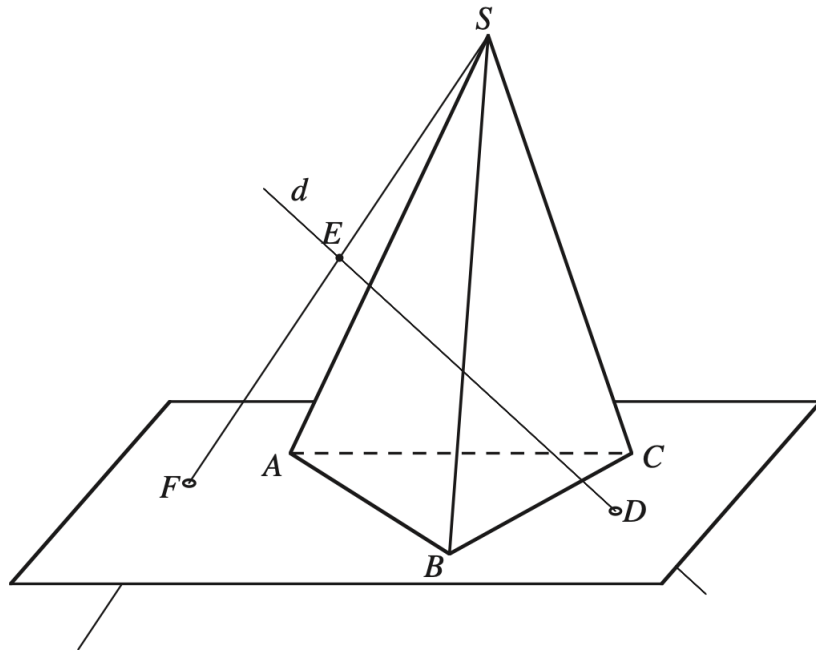
**Exercice 2.10**

Construire avec visibilité l'intersection du cube avec le plan  $KLM$ .

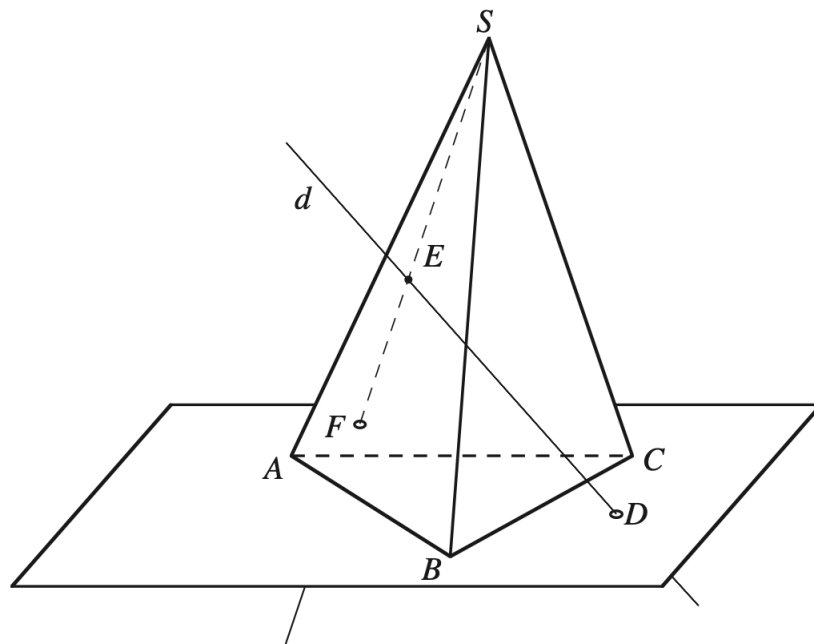


**Exercice 2.11**

Construire l'intersection de la pyramide  $SABC$  avec la droite  $d$ .  
Les points  $D$  et  $F$  sont dans le plan  $ABC$ .

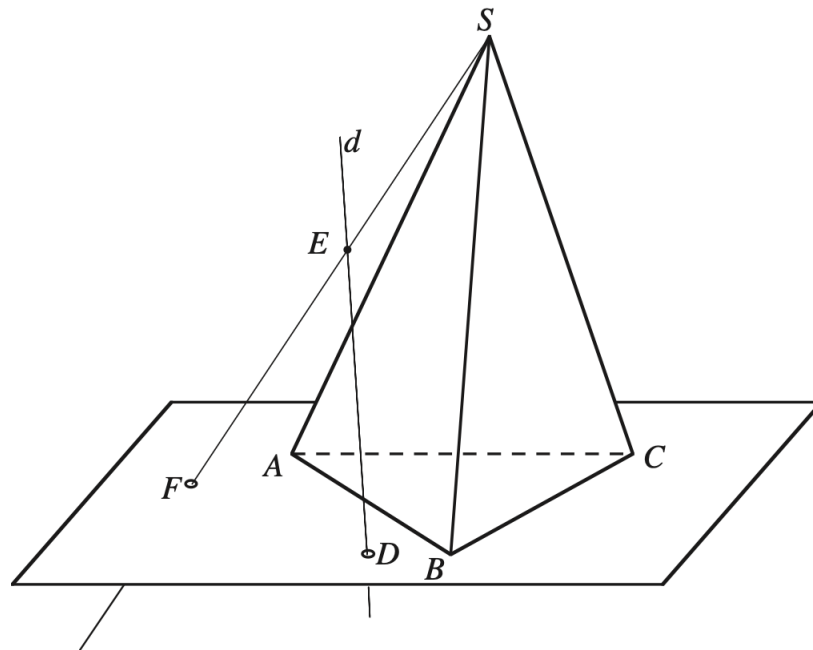
**Exercice 2.12**

Construire l'intersection de la pyramide  $SABC$  avec la droite  $d$ .  
Les points  $D$  et  $F$  sont dans le plan  $ABC$ .

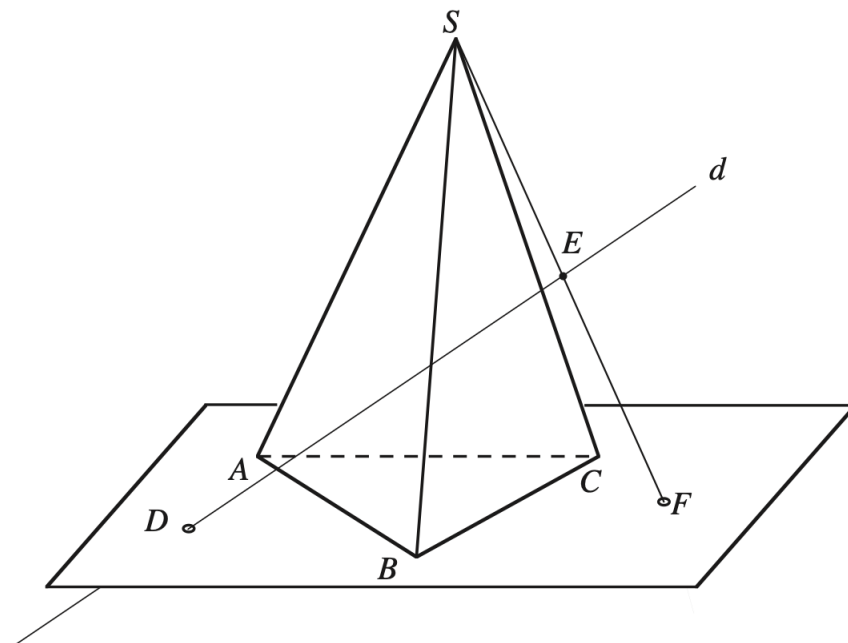


**Exercice 2.13**

Construire l'intersection de la pyramide  $SABC$  avec la droite  $d$ .  
Les points  $D$  et  $F$  sont dans le plan  $ABC$ .

**Exercice 2.14**

Construire l'intersection de la pyramide  $SABC$  avec la droite  $d$ .  
Les points  $D$  et  $F$  sont dans le plan  $ABC$ .

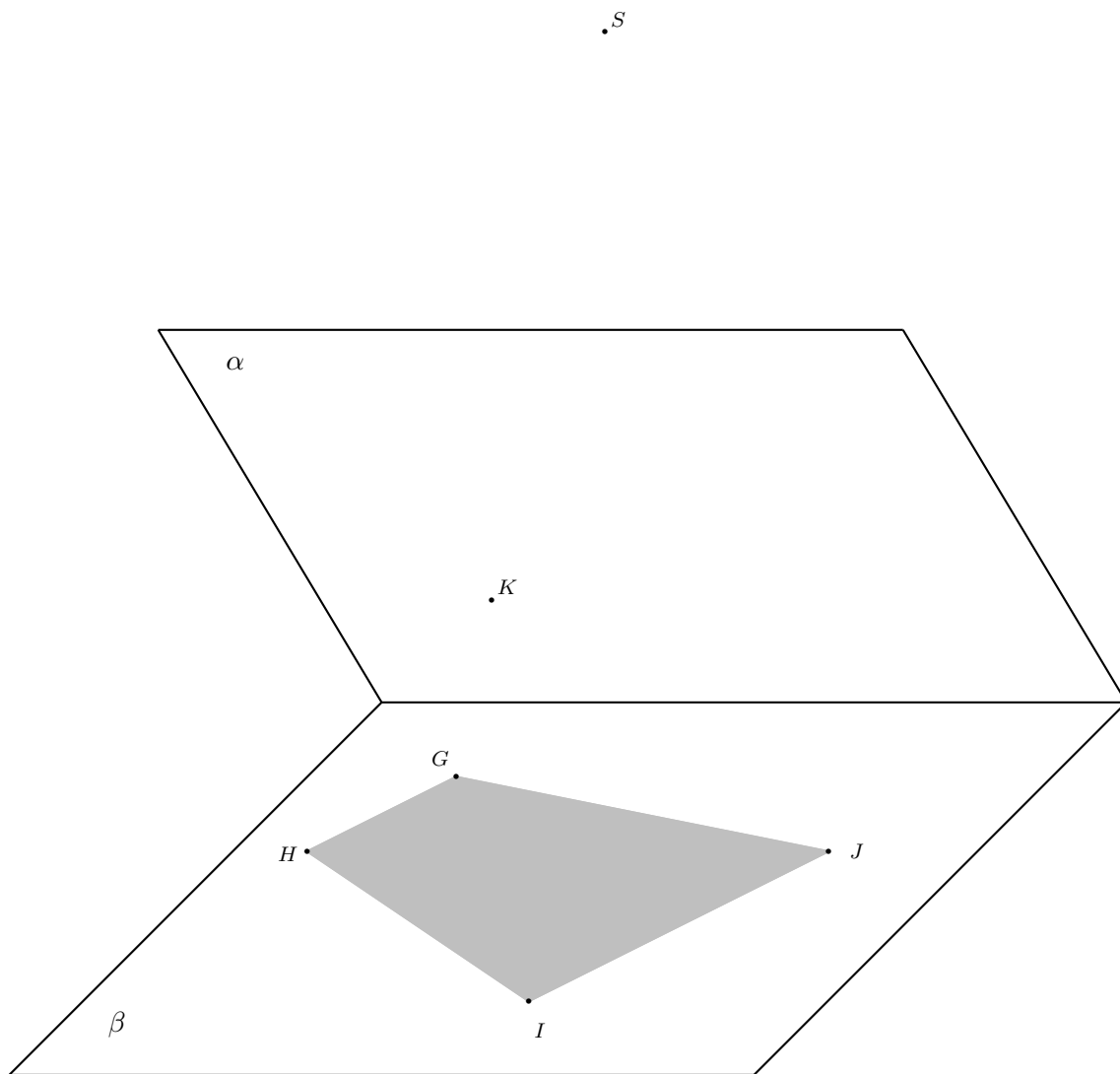


**Exercice 2.15**

La base de la pyramide  $SGHIJ$  se situe dans le plan  $\beta$ .

La droite  $SG$  coupe le plan  $\alpha$  en  $k$ .

Déterminer l'intersection de la pyramide  $SGHIJ$  avec le plan  $\alpha$ .

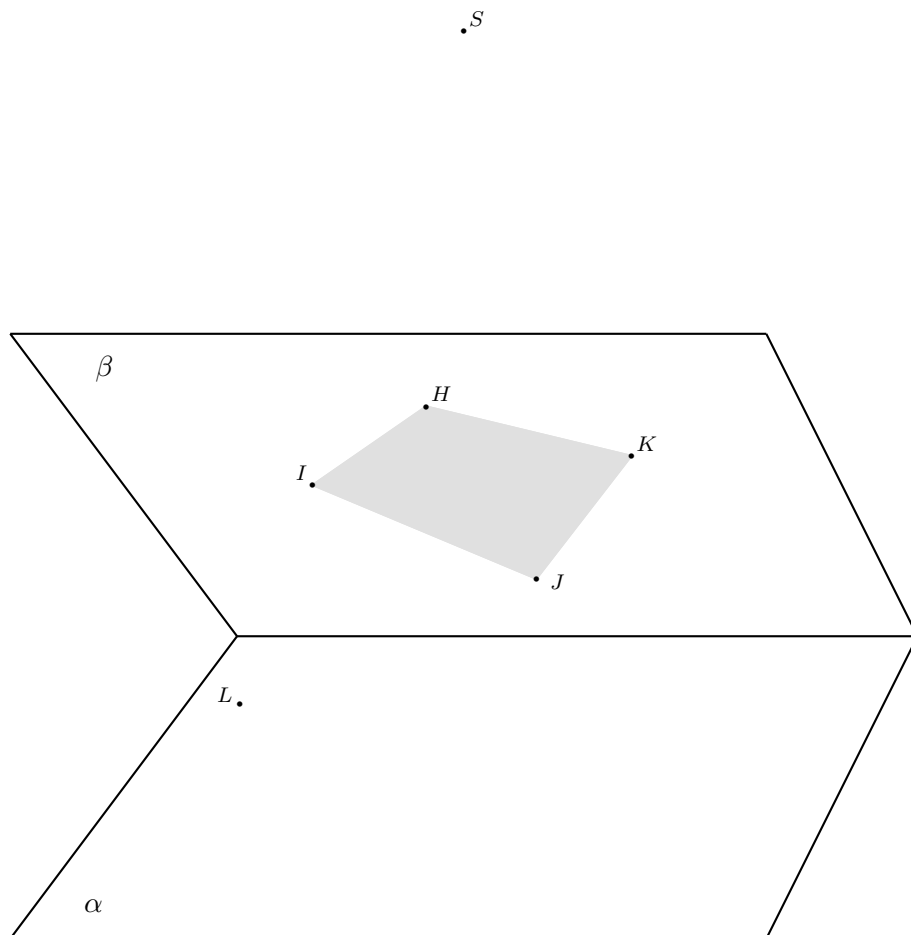


**Exercice 2.16**

La base d'une pyramide  $SLMNP$  se situe dans le plan  $\alpha$ .

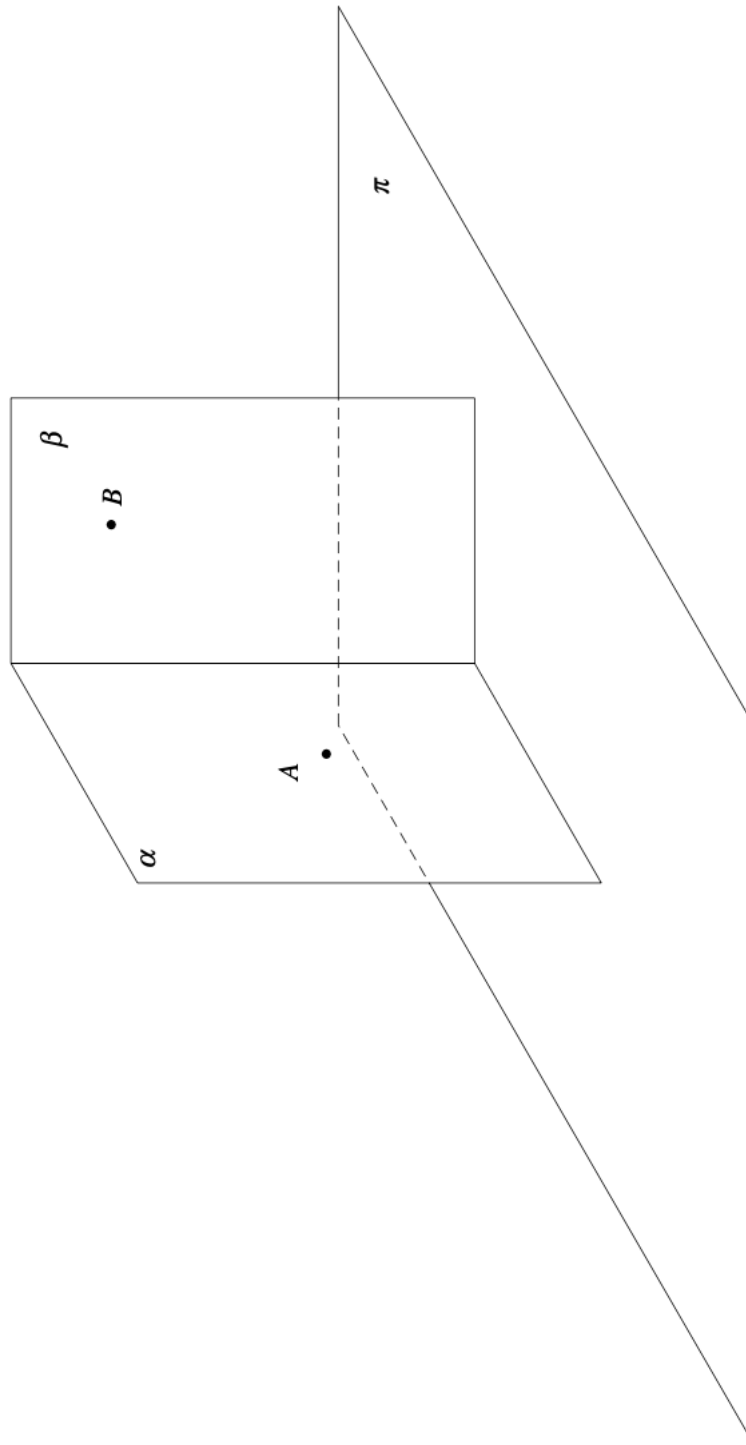
Le quadrilatère  $HIJK$  représente l'intersection de la pyramide  $SLMNP$  avec le plan  $\beta$ .

Déterminer les points  $M$ ,  $N$  et  $P$ .



**Exercice 2.17**

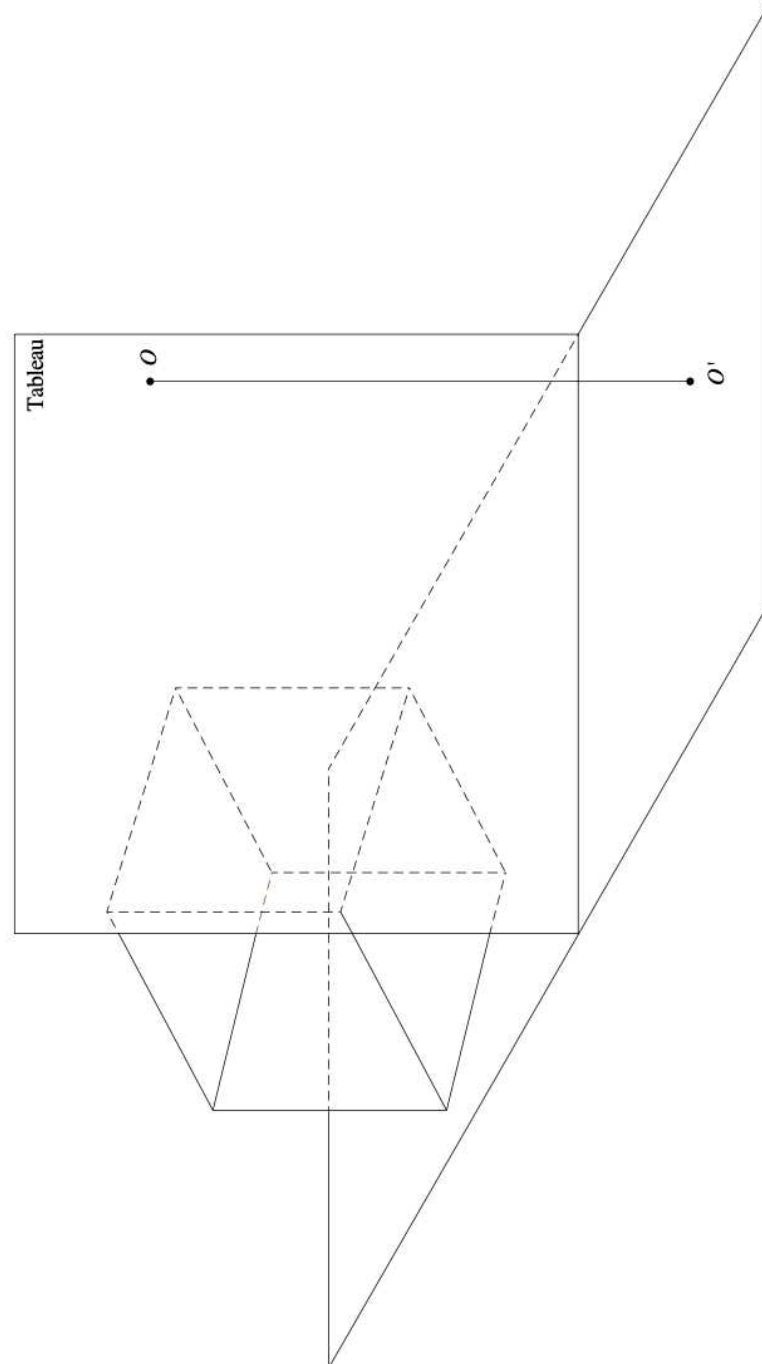
Le point  $A$  est dans le plan  $\alpha$  et le point  $B$  est dans le plan  $\beta$ .  
Construire l'intersection de la droite  $AB$  avec la plan  $\pi$ .



**Exercice 2.18**

Le parallélépipède rectangle représenté est posé sur le sol, derrière le tableau. Le point  $O'$  est sur le sol et  $OO'$  est parallèle aux arêtes verticales du parallélépipède.

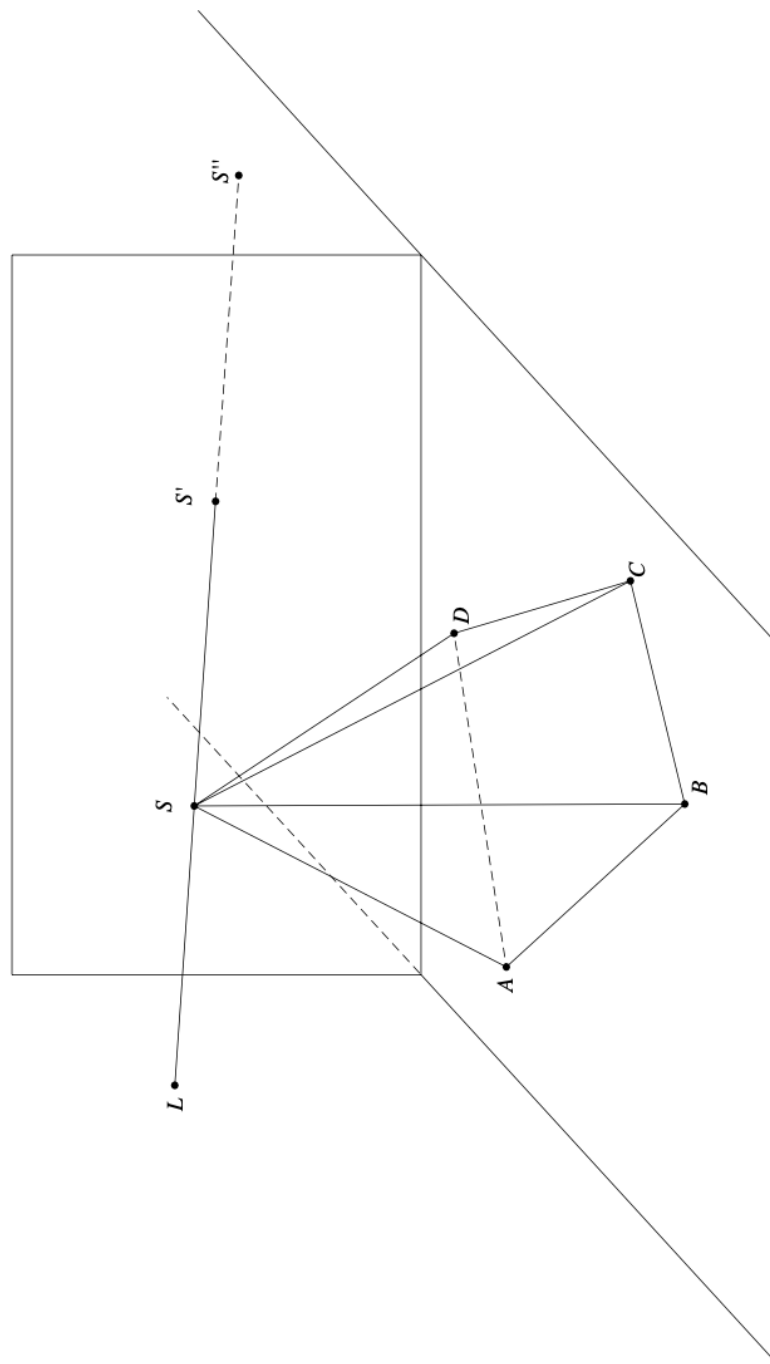
Construire la projection centrale de centre  $O$  du parallélépipède sur le tableau.



**Exercice 2.19**

La pyramide de sommet  $S$  a sa base  $ABCD$  située sur le sol. Elle est éclairée par une source lumineuse  $L$ . L'ombre de  $S$  sur le mur est  $S'$ , alors que son ombre sur le sol serait  $S''$  si le mur n'existait pas.

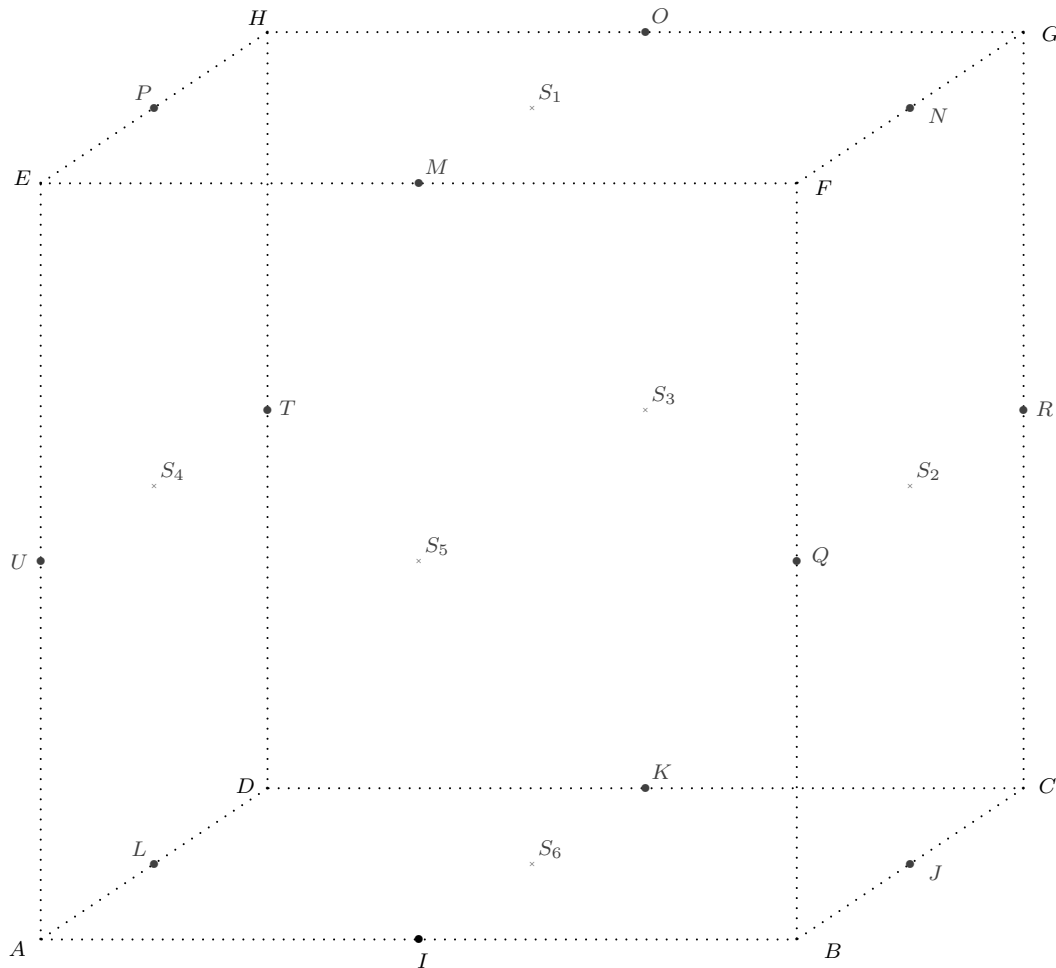
Construire l'ombre de la pyramide sur le sol et le mur.



### 3. Sections dans le cube

Dans le cube  $ABCDEFGH$ , on note :

- $I$  le milieu de  $AB$
- $J$  le milieu de  $BC$
- $K$  le milieu de  $CD$
- $L$  le milieu de  $AD$
- $M$  le milieu de  $EF$
- $N$  le milieu de  $FG$
- $O$  le milieu de  $GH$
- $P$  le milieu de  $EH$
- $R$  le milieu de  $CG$
- $T$  le milieu de  $DH$
- $U$  le milieu de  $AE$
- $Q$  le milieu de  $BF$
- $S_1$  le milieu de la face  $EFGH$
- $S_2$  le milieu de la face  $BCGF$
- $S_3$  le milieu de la face  $CGHD$
- $S_4$  le milieu de la face  $ADHE$
- $S_5$  le milieu de la face  $ABFE$
- $S_6$  le milieu de la face  $ABCD$



Les constructions se font sur les pages suivantes en tenant compte de la visibilité.

**Exercice 3.1**

Dans le cube  $ABCDEFGH$  représenter les plans  $PNJL$  et  $HGBA$ .

**Exercice 3.2**

Représenter les plans  $PNCD$  et  $UQRT$ .

**Exercice 3.3**

Notons par exemple  $X_{MF}$  le milieu de  $MF$ .

Représenter les plans  $EHCB$  et  $X_{MF}X_{OG}X_{KC}X_{IB}$ .

**Exercice 3.4**

Représenter les plans  $EHCB$  et  $HGBA$ .

**Exercice 3.5**

Représenter le triangle  $EHJ$  et le quadrilatère  $S_1S_4S_6S_2$ .

**Exercice 3.6**

Représenter le triangle  $S_1BC$  et le plan  $EHRQ$ .

**Exercice 3.7**

Représenter les triangles  $PNS_6$  et  $AOC$ .

**Exercice 3.8**

Représenter les triangles  $PNS_6$  et  $EOC$ .

**Exercice 3.9**

Dans le cube  $ABCDEFGH$  représenter la pyramide  $ABCDS_1$  et le plan  $UQRT$ .

**Exercice 3.10**

Représenter la pyramide  $ABCDS_1$  et le plan  $IJNM$ .

**Exercice 3.11**

Représenter la pyramide  $ABCDS_1$  et le plan  $UQGH$ .

**Exercice 3.12**

Représenter la pyramide  $IJKLS_1$  et le plan  $BCHE$ .

**Exercice 3.13**

Représenter la pyramide  $IJKLS_1$  et le plan  $ABRT$ .

**Exercice 3.14**

Représenter l'octaèdre  $S_1S_2S_3S_4S_5S_6$  et le plan  $BDHF$ .

**Exercice 3.15**

Représenter l'octaèdre  $S_1S_2S_3S_4S_5S_6$  et le plan  $UQGH$ .

**Exercice 3.16**

Représenter l'octaèdre  $S_1S_2S_3S_4S_5S_6$  et le plan  $ABGH$ .

**Exercice 3.17**

Représenter l'octaèdre  $S_1S_2S_3S_4S_5S_6$  et le plan  $UPO$ .

**Exercice 3.18**

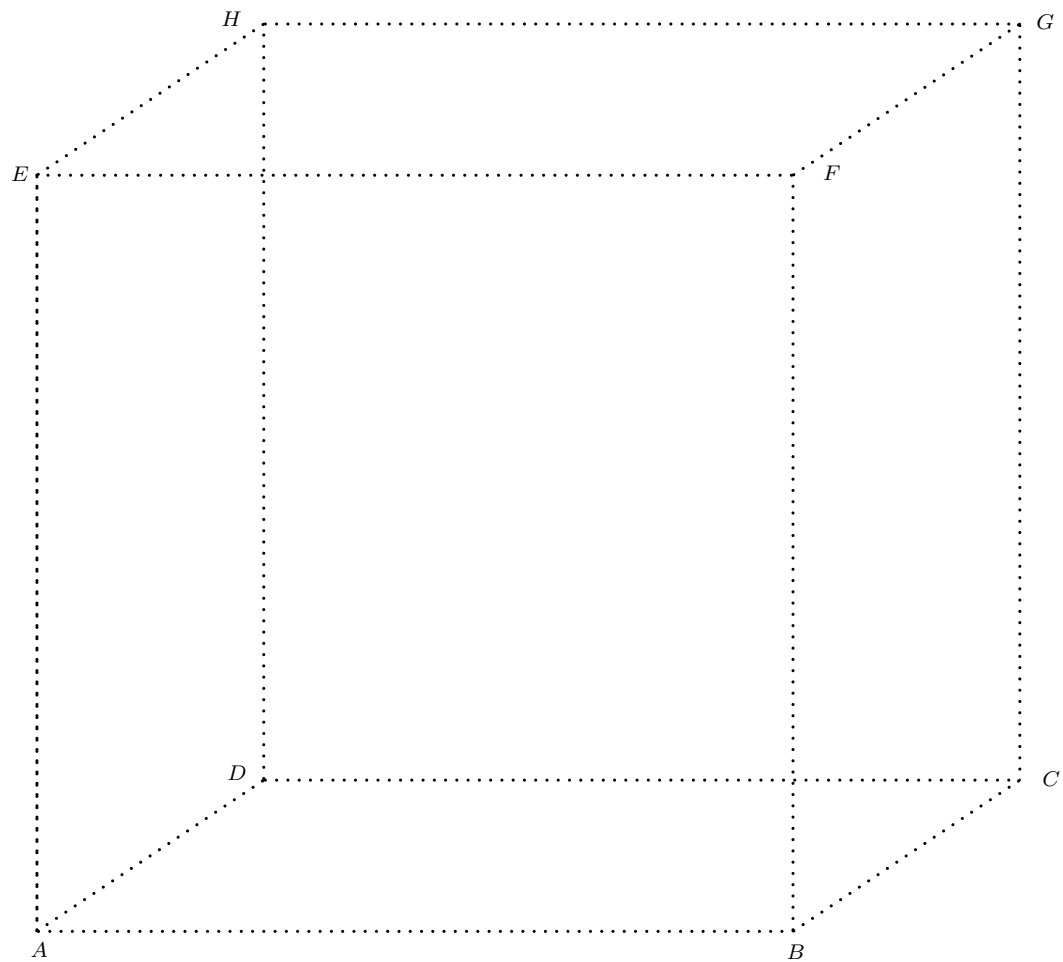
Soit  $Y$  sur  $AB$  tel que  $YB = 2.5$  cm. Soit  $X$  sur  $DC$  tel que  $XC = 2.5$  cm. Soit  $Z$  sur  $HG$  tel que  $HZ = 1.0$  cm.

Représenter l'octaèdre  $S_1S_2S_3S_4S_5S_6$  et le plan  $XYZ$ .

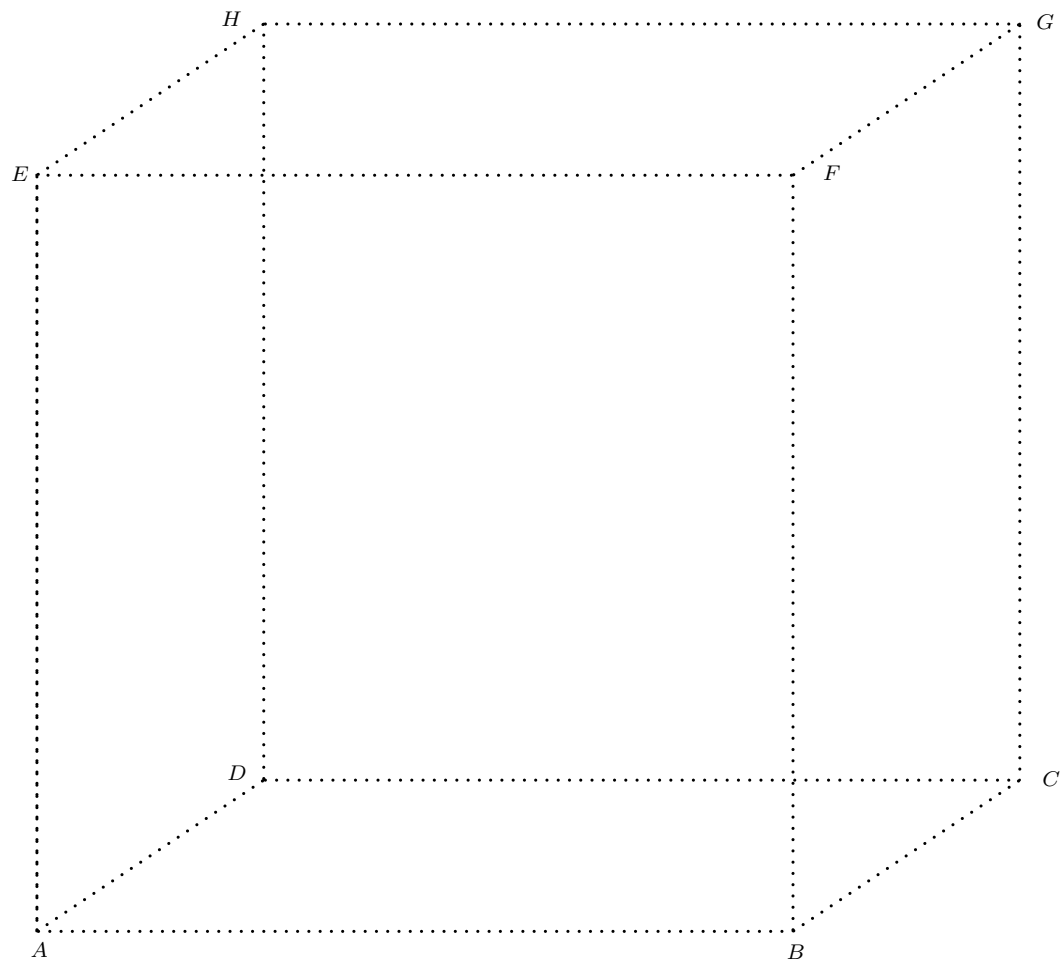
**Exercice 3.19**

Représenter l'intersection des pyramides  $ABCDH$  et  $IJKLM$ .

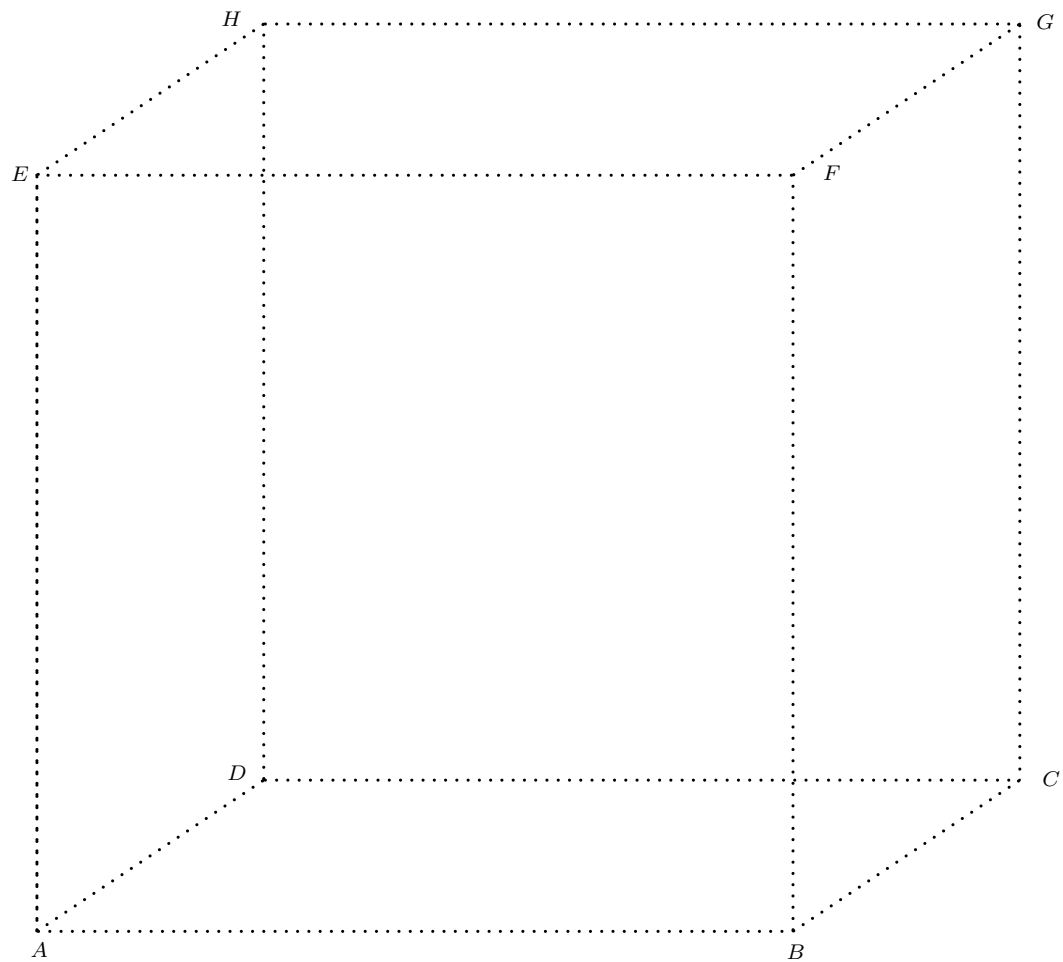
## Exercise 3.25



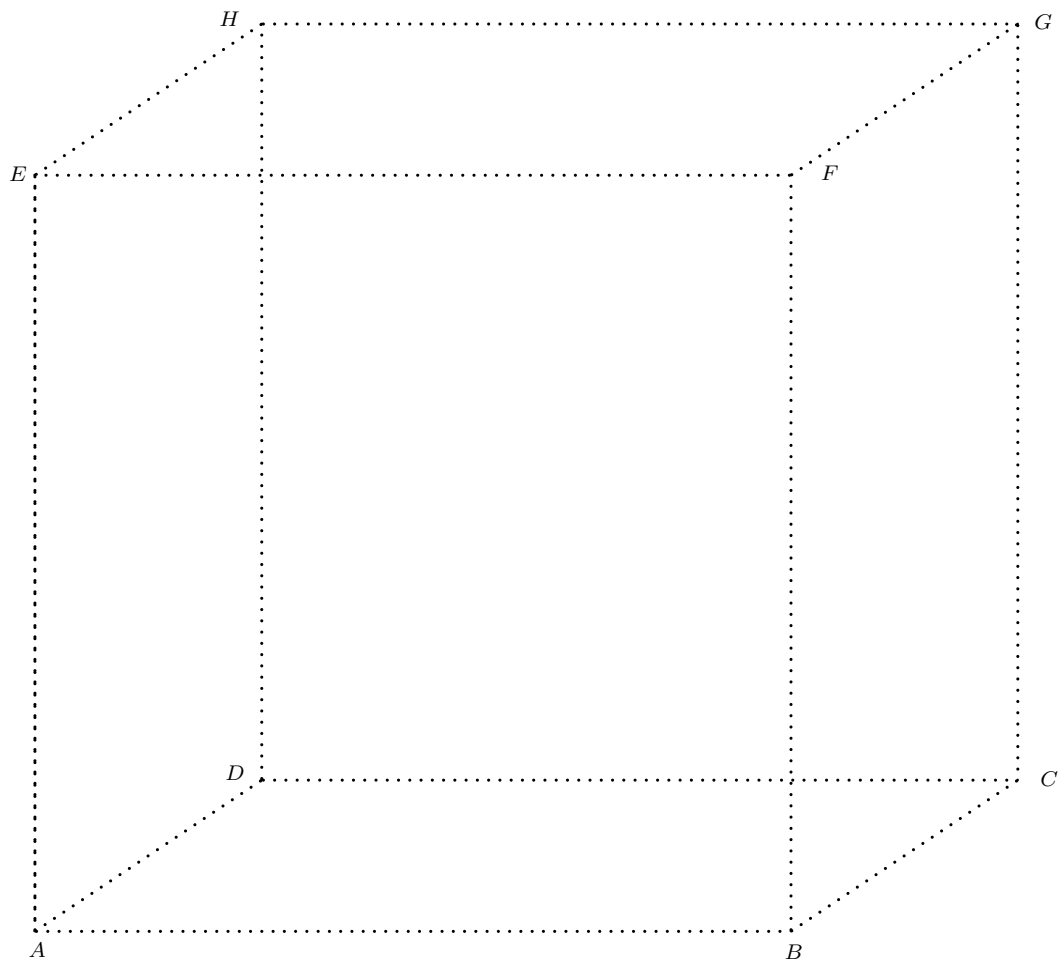
## Exercise 3.26



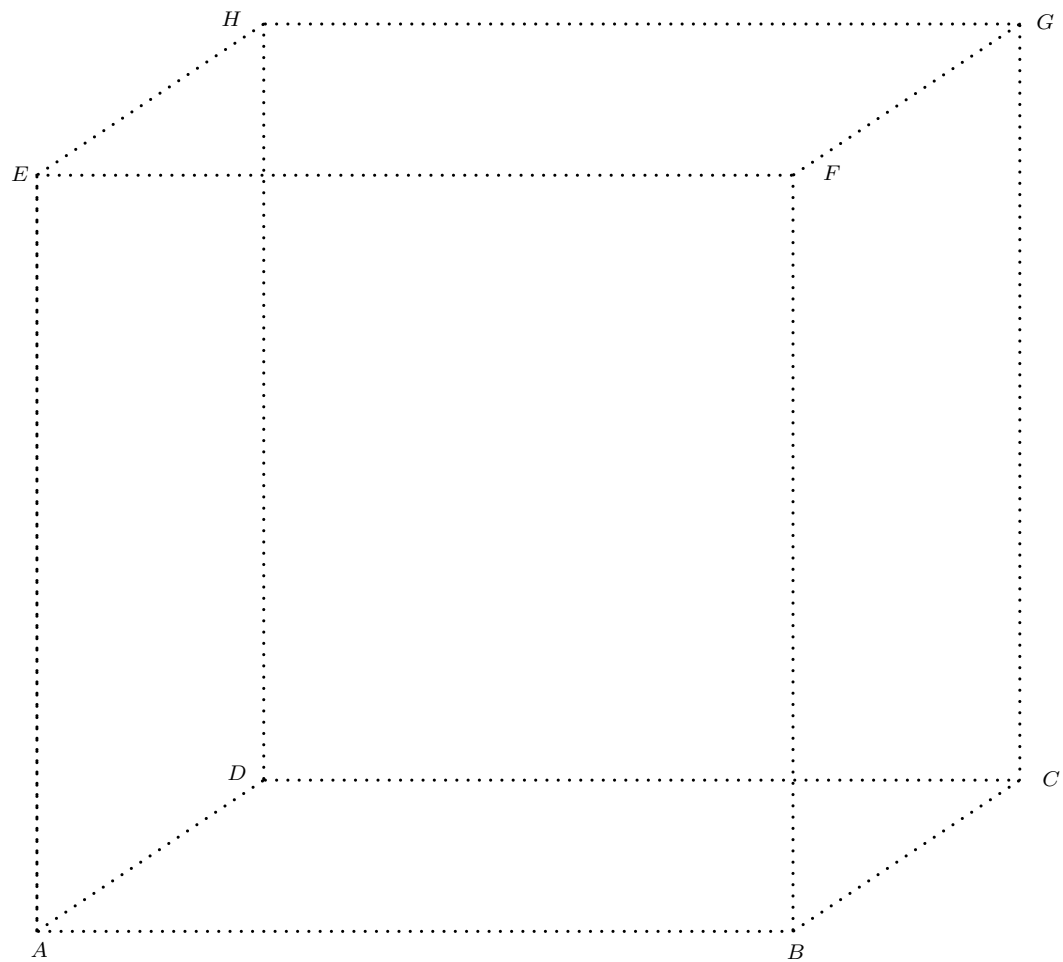
## Exercise 3.27



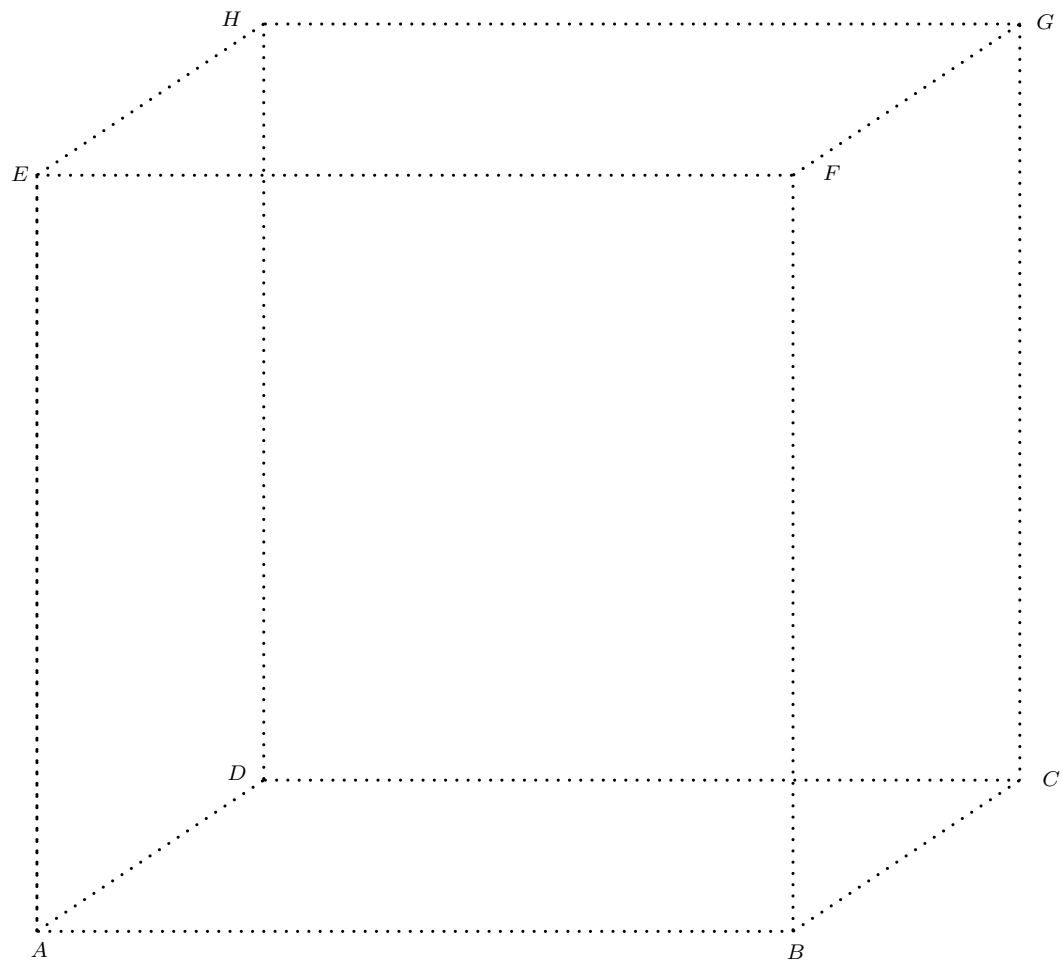
## Exercise 3.28



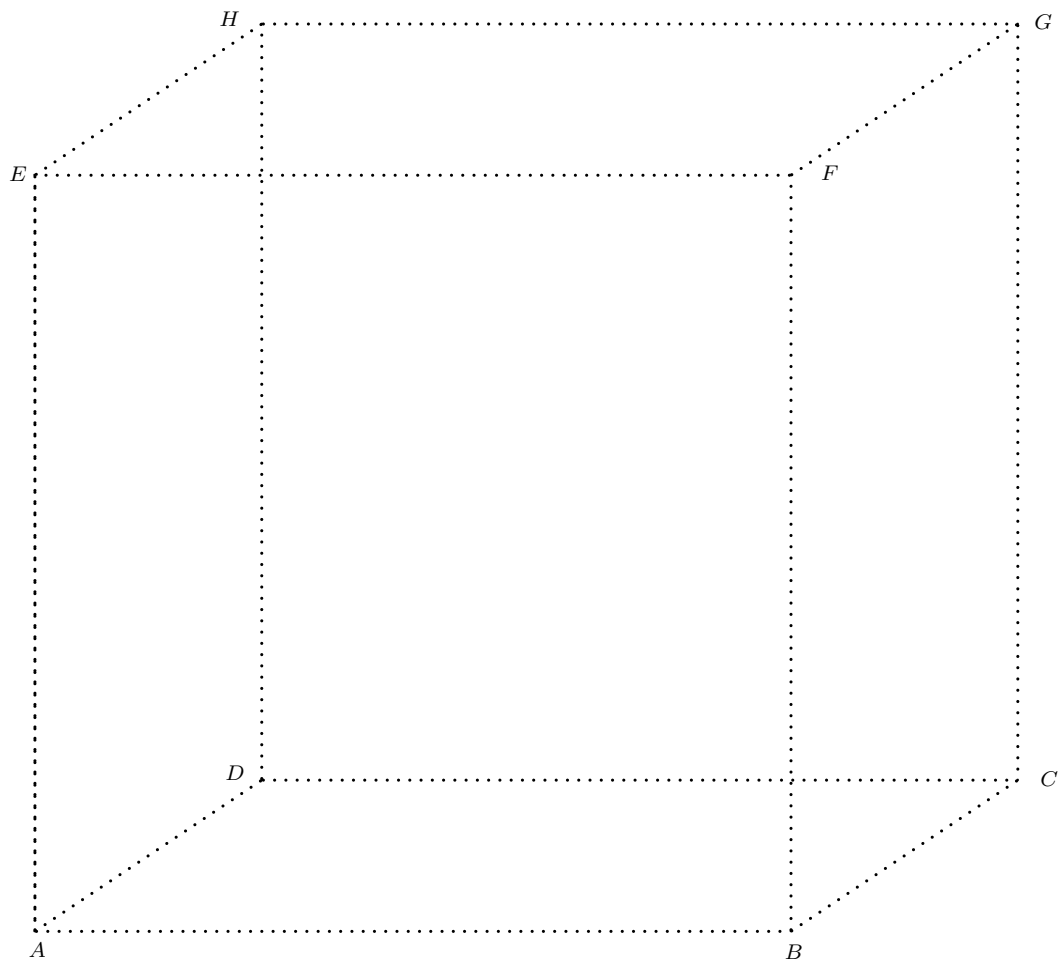
## Exercise 3.29



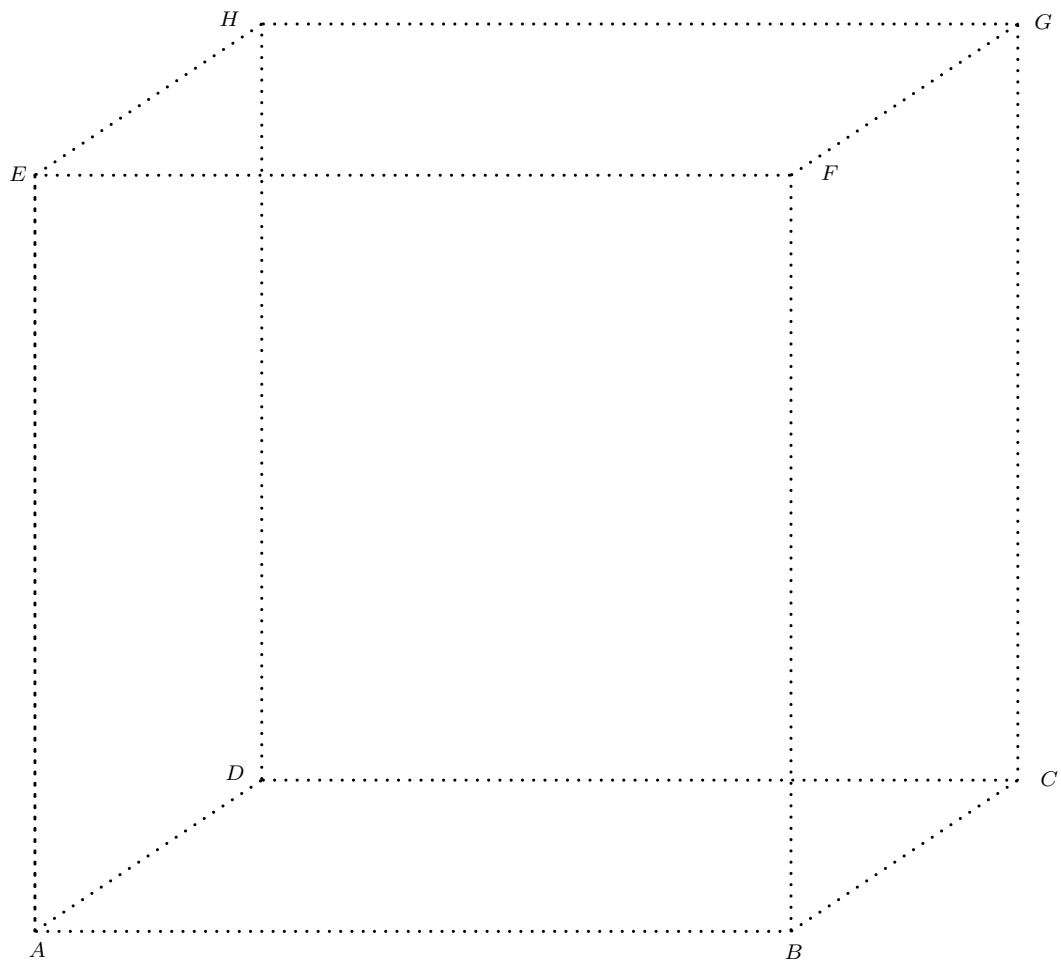
## Exercise 3.30



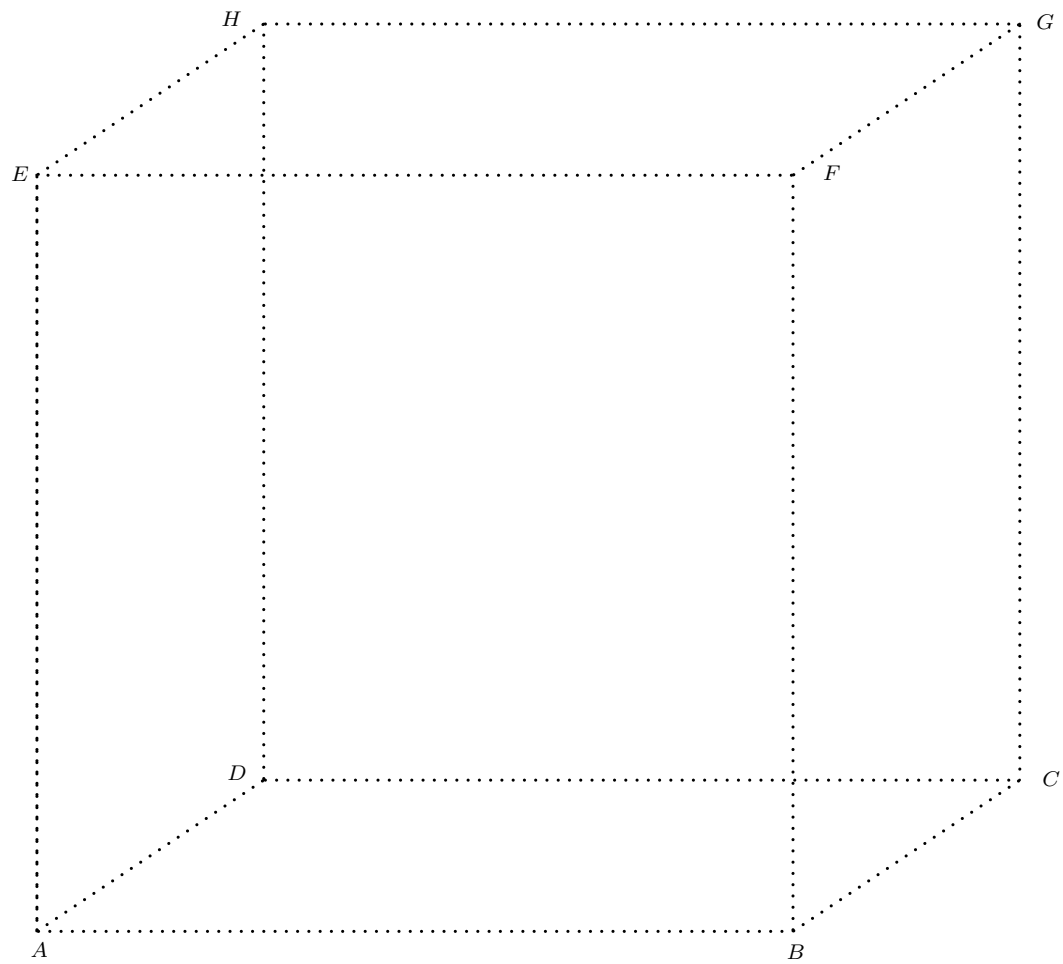
## Exercise 3.31



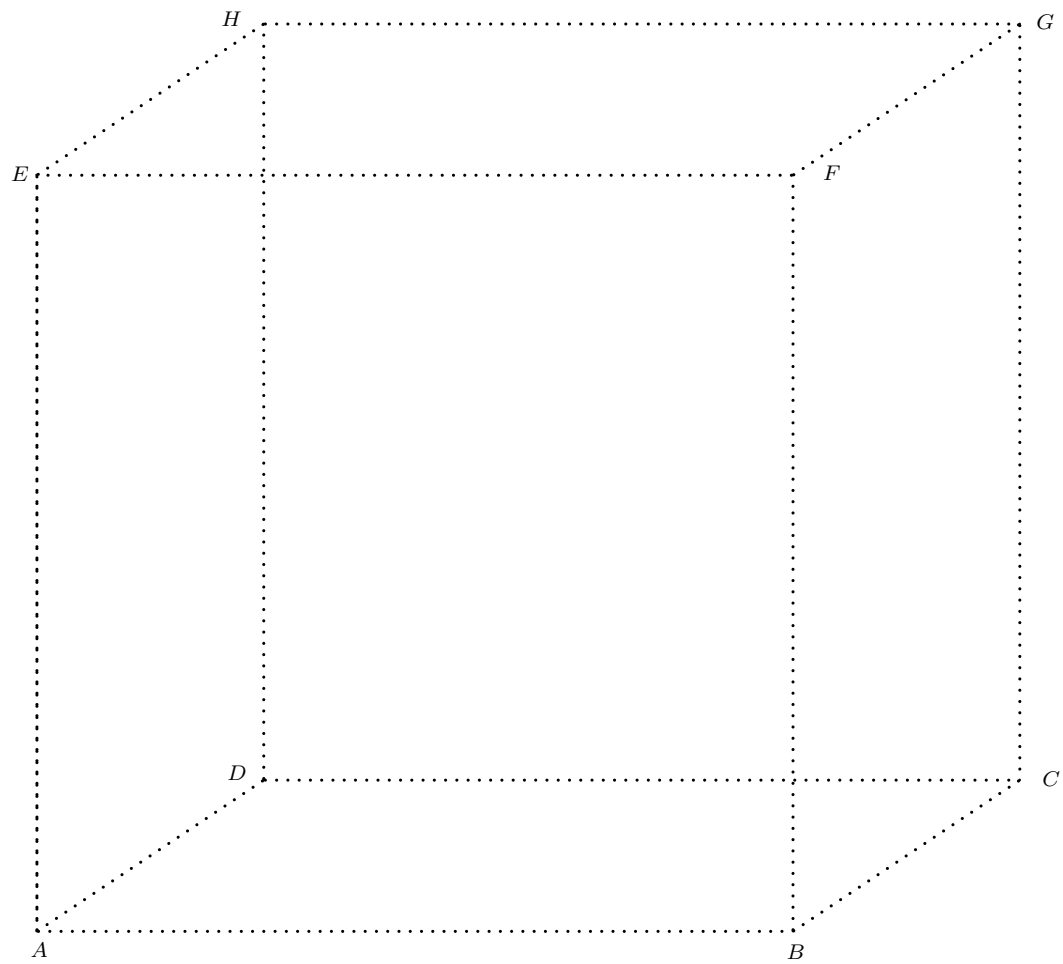
## Exercise 3.32



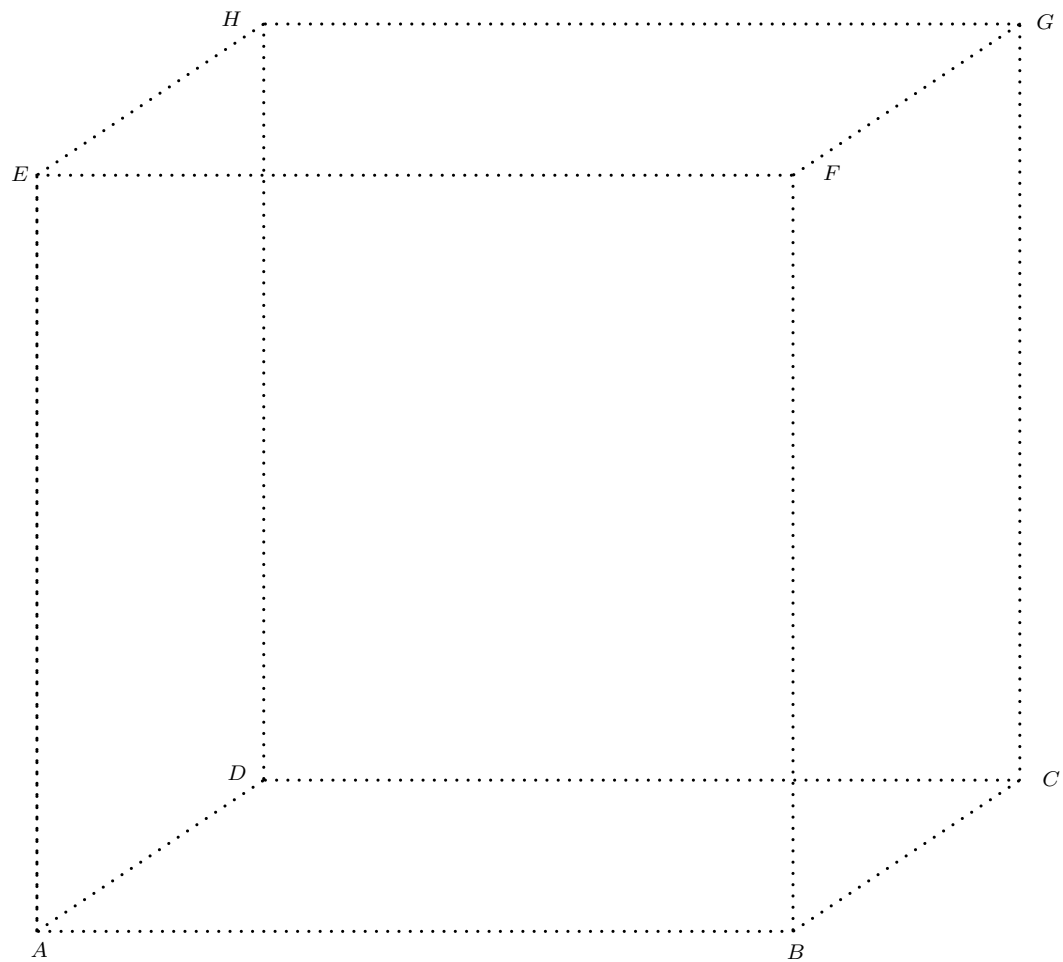
## Exercise 3.33



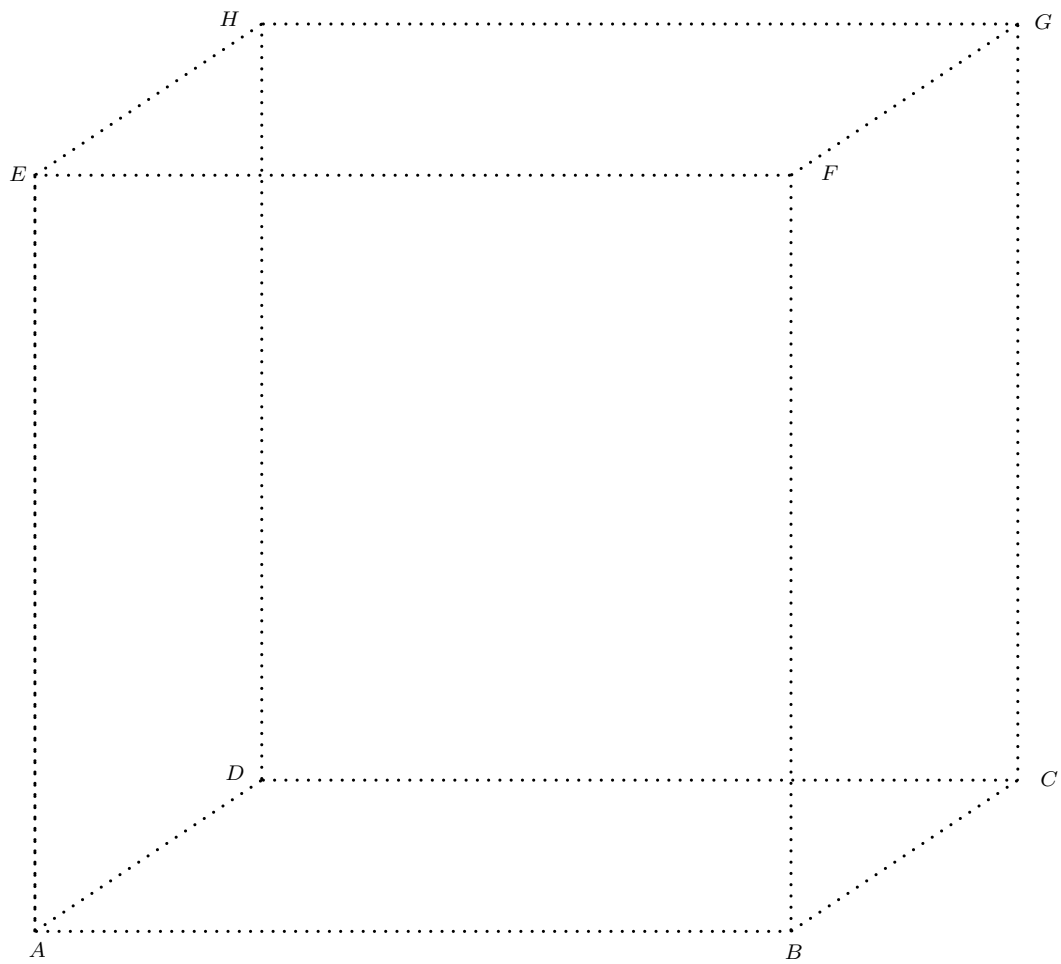
## Exercise 3.34



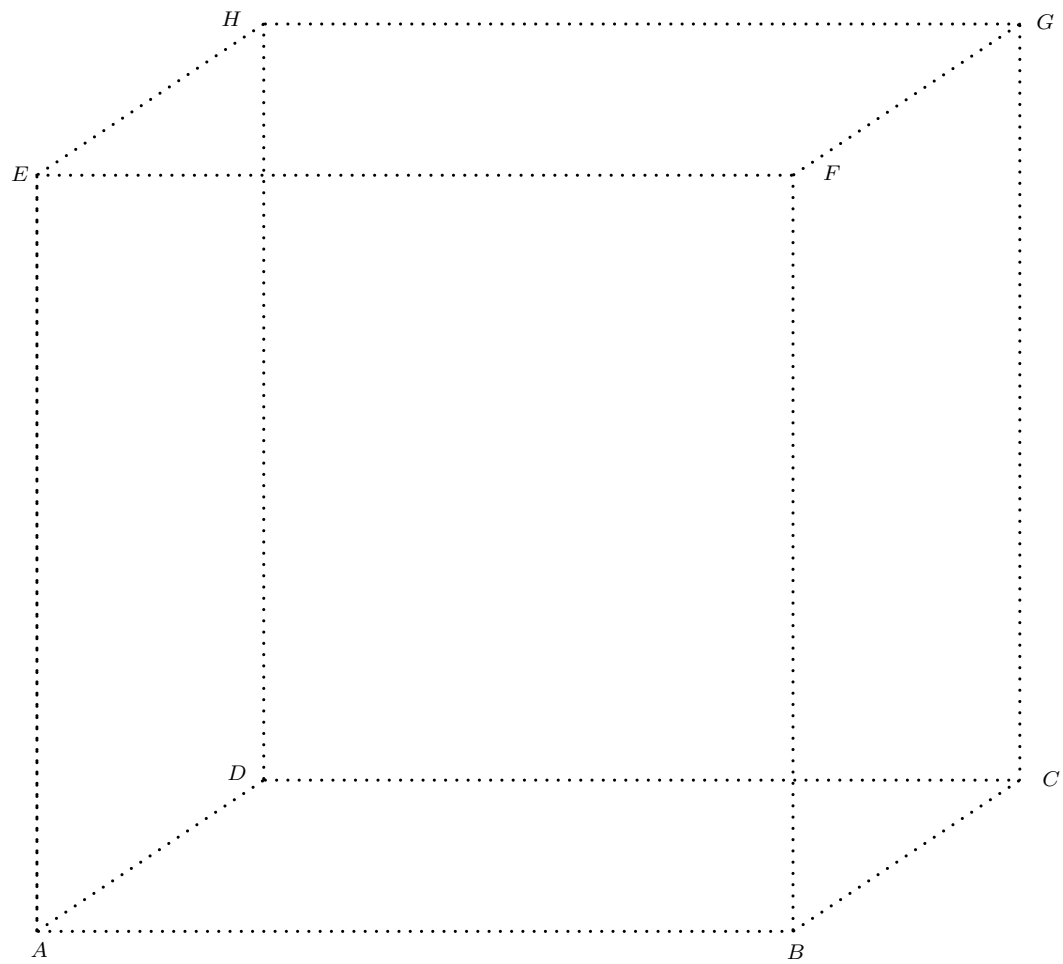
## Exercise 3.35



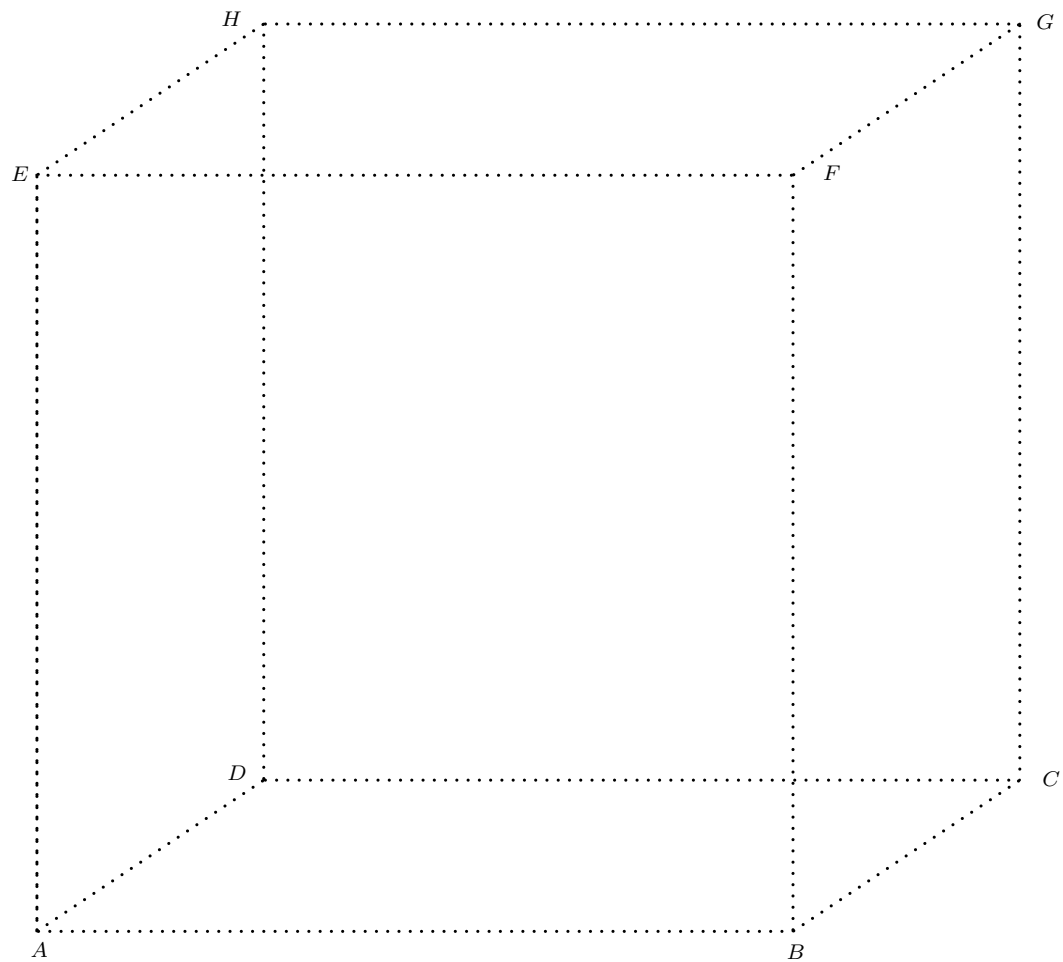
## Exercise 3.36



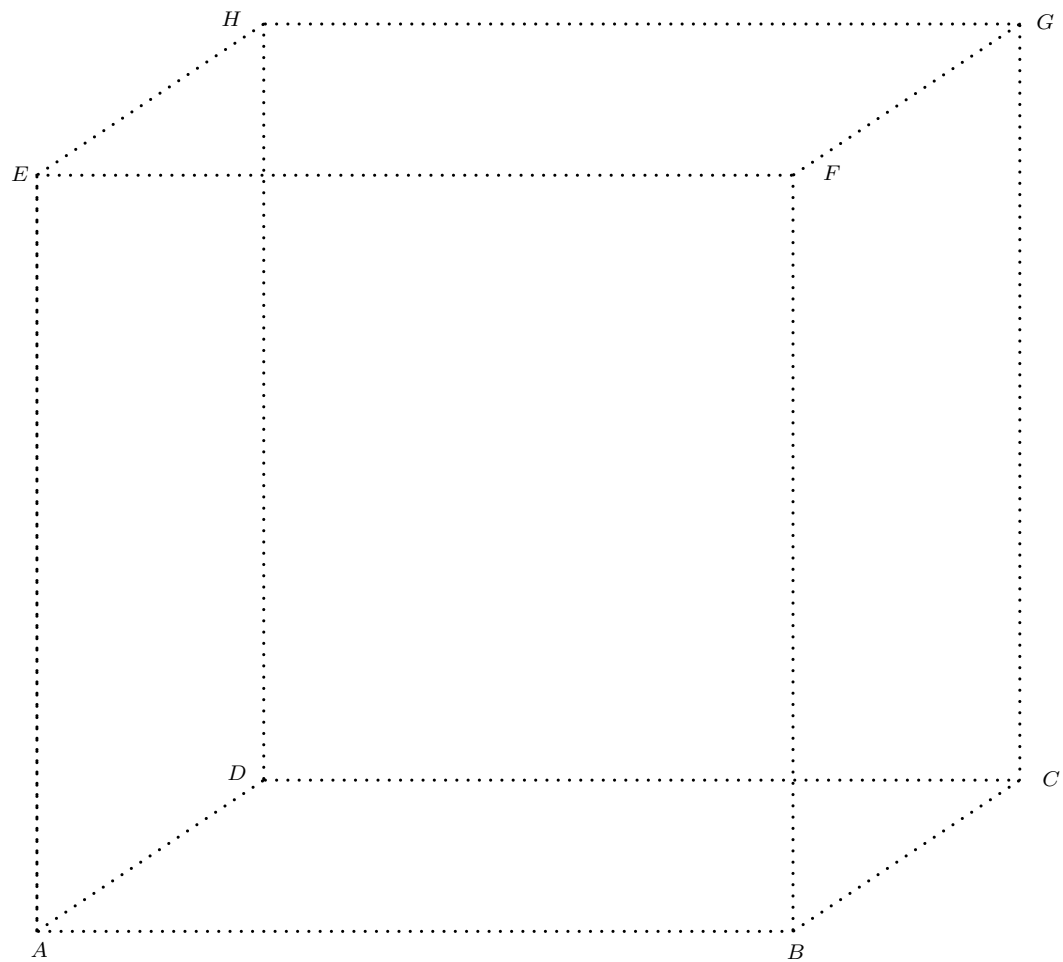
## Exercise 3.37



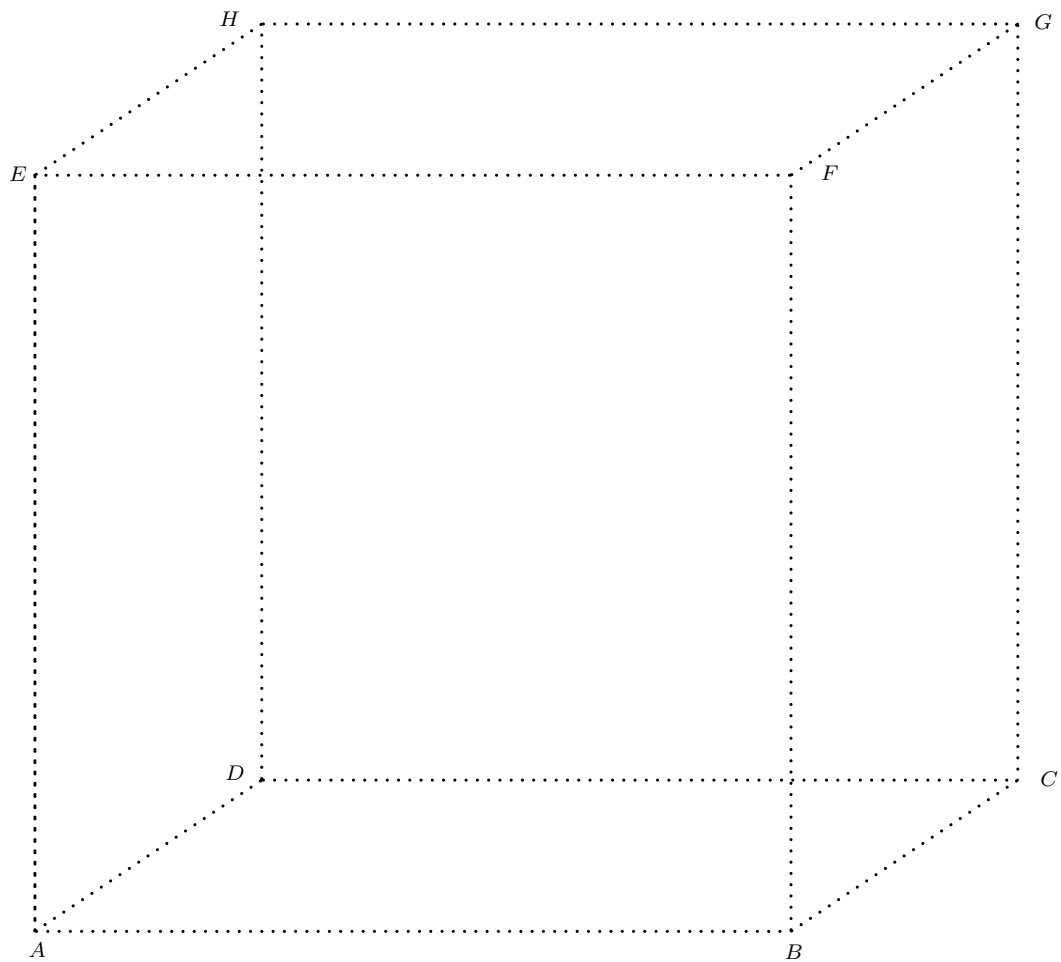
## Exercise 3.38



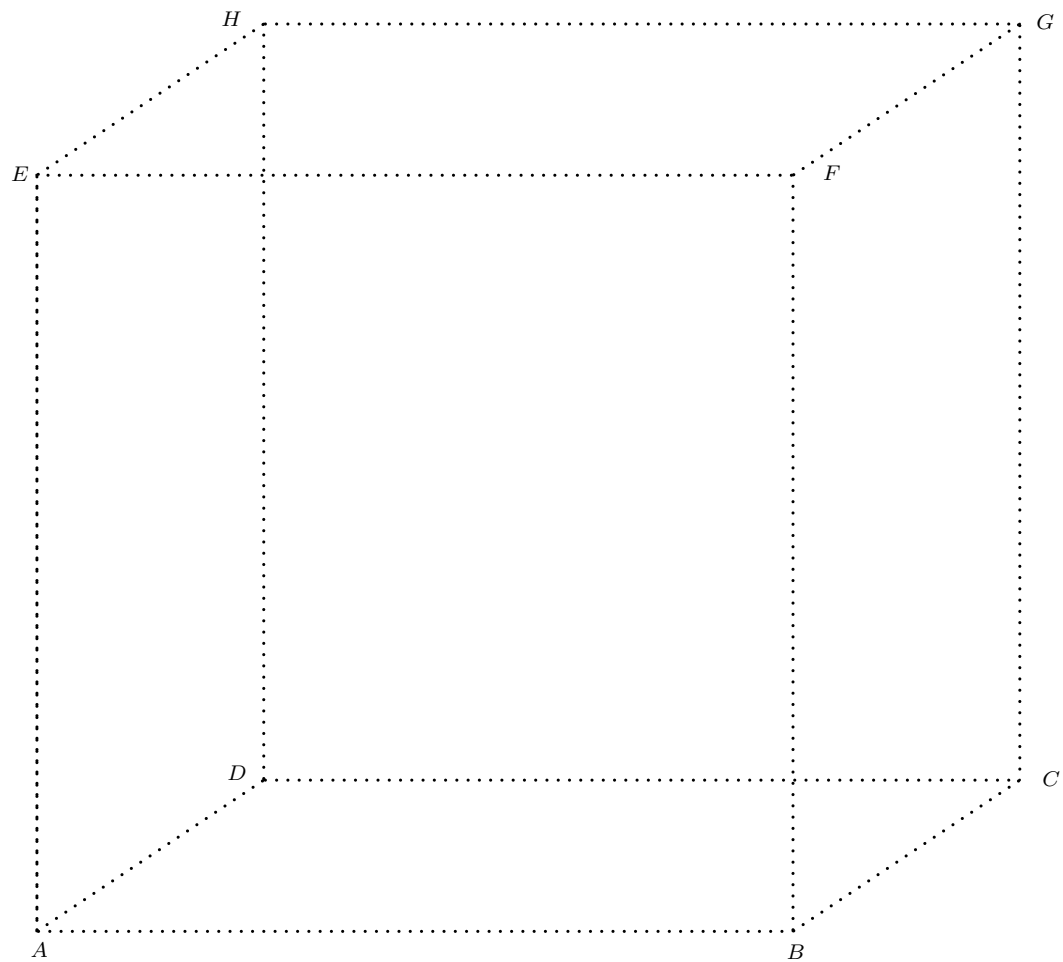
## Exercise 3.39



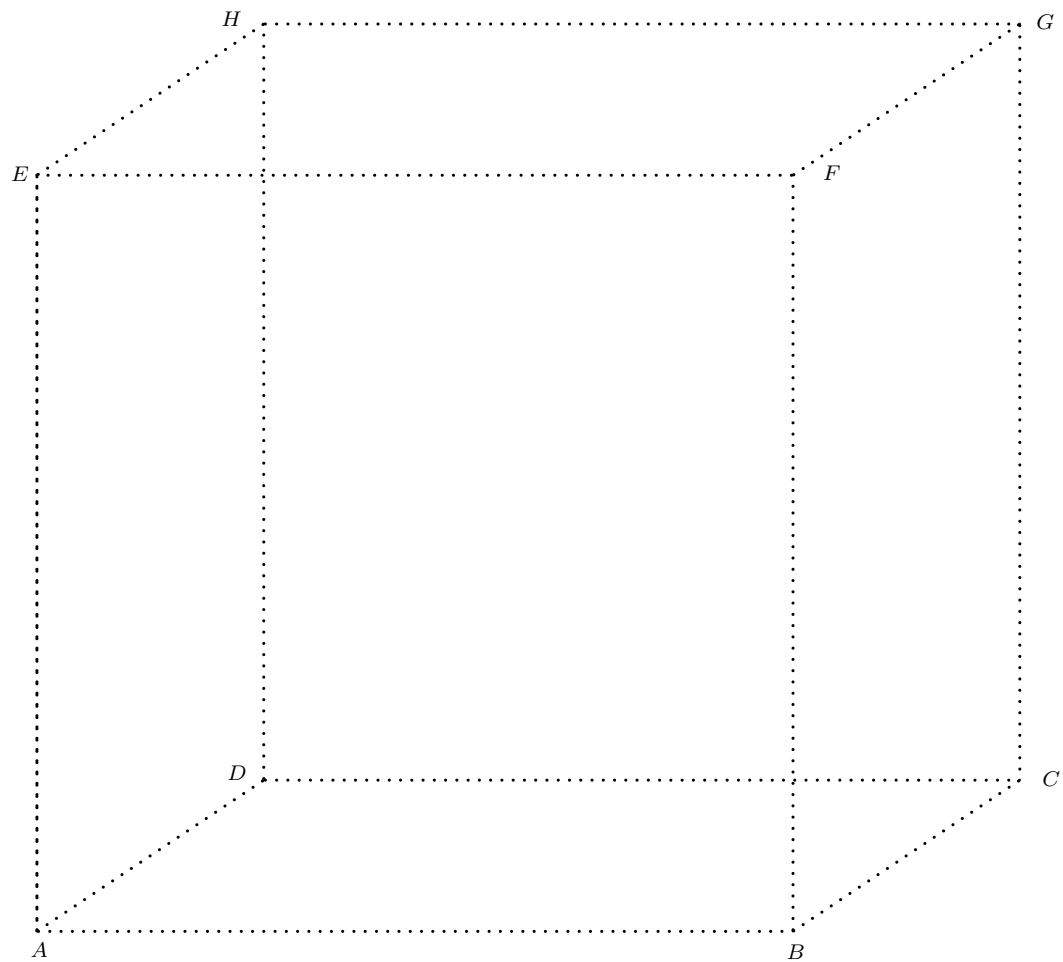
## Exercise 3.40



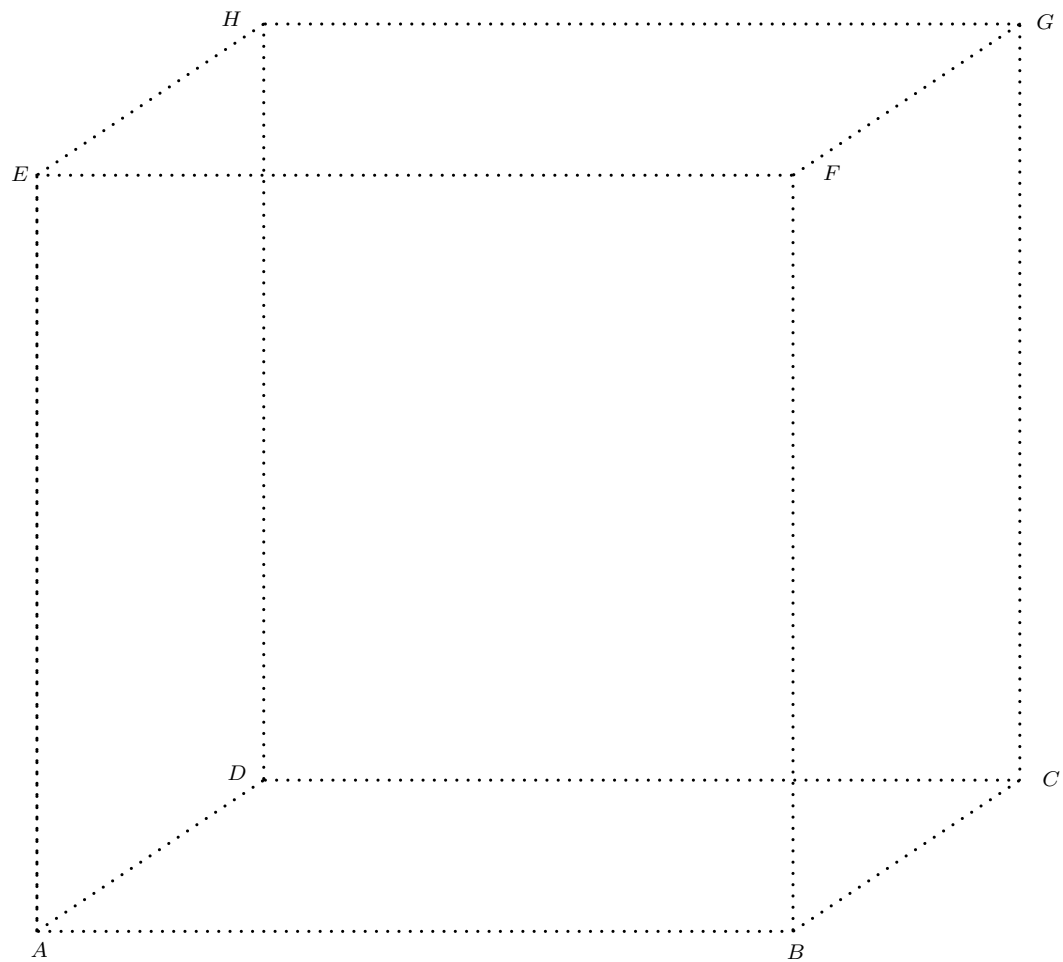
## Exercise 3.41



## Exercise 3.42



## Exercise 3.43



## 4. Axiomes de la géométrie de l'espace

### 4.1 Axiomes sur les points, droites et plans

- A1.** Par deux points distincts, il passe une et une seule droite.
- A2.** Par trois points non alignés, il passe un et un seul plan.
- A3.** Si deux points d'une droite appartiennent à un plan, alors toute la droite appartient à ce plan.
- A4.** Si deux plans ont un point commun sans être confondus, alors leur intersection est une droite.
- A5.** Par un point donné, il passe une infinité de plans.
- A6.** Par une droite et un point extérieur à cette droite, il passe un et un seul plan.
- A7.** Deux droites sécantes sont contenues dans un unique plan.
- A8.** Deux droites parallèles sont coplanaires.

### 4.2 Parallélisme et perpendicularité

- B1.** Deux droites de l'espace peuvent être sécantes, parallèles ou gauches (non coplanaires).
- B2.** Si deux droites sont parallèles à une même troisième, elles ne sont pas nécessairement parallèles entre elles.
- B3.** Un plan peut être parallèle à une droite sans la contenir.
- B4.** Deux plans peuvent être parallèles ou sécants.
- B5.** Si une droite est perpendiculaire à deux droites sécantes d'un plan, alors elle est perpendiculaire à ce plan.

### 4.3 Axiomes métriques (géométrie euclidienne)

- Les droites sont infinies et rectilignes.
- Les plans sont infinis et plats.
- Par un point extérieur à une droite, il passe une et une seule droite parallèle à cette droite (postulat d'Euclide).