Gymnase de Burier
1OS PM
2025 – 2026

Introduction à la géométrie en 3D
Perspectives et sections dans le cube

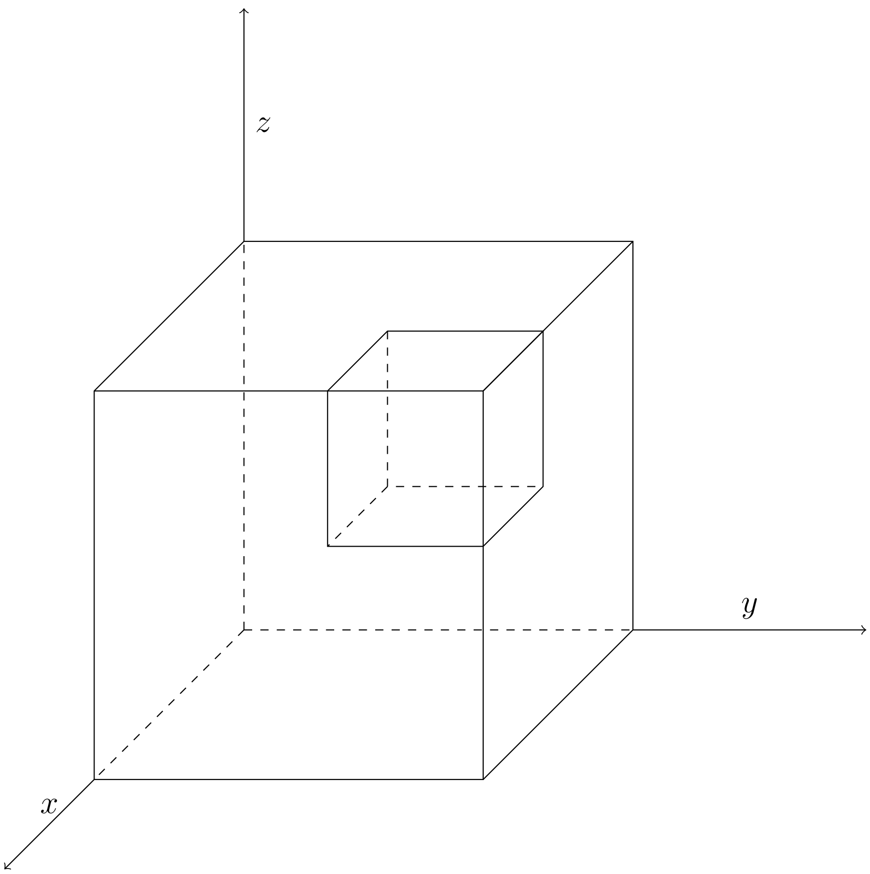


Table des matières

sv – version 2025

1. Éléments de géométrie de l'espace

Exercice 1.1

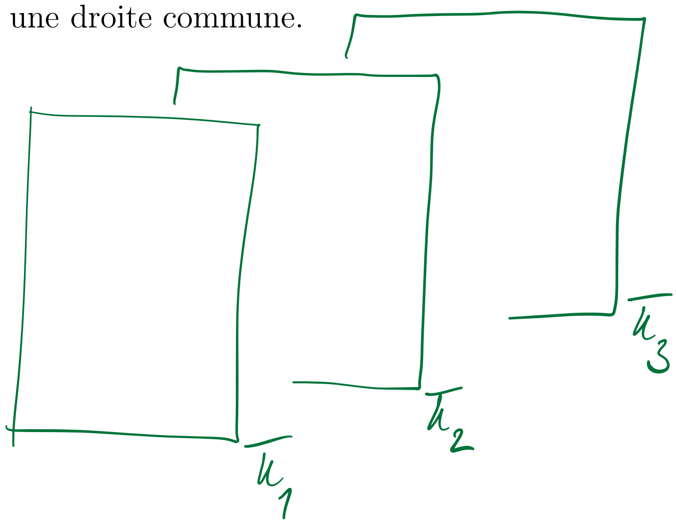
Représenter une figure formée par trois plans ayant :

a) aucun point commun ;

b) un seul point commun ;

c) une droite commune.

a)



parallèle

$\pi_1 \parallel \pi_2 \parallel \pi_3$

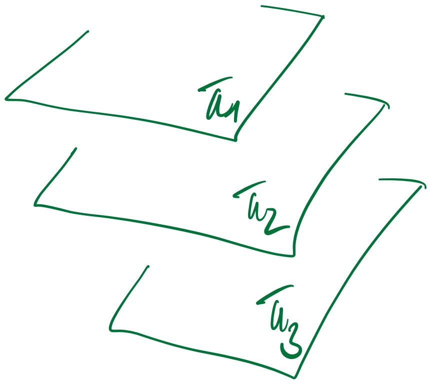
intersection

$\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$ ← ensemble vide

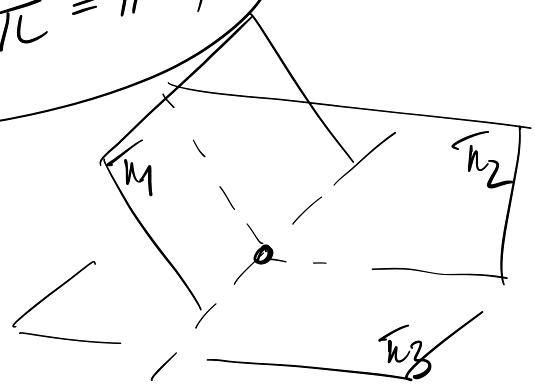
$\pi_2 \cap \pi_3 = \emptyset$

$\pi_1 \cap \pi_3 = \emptyset$

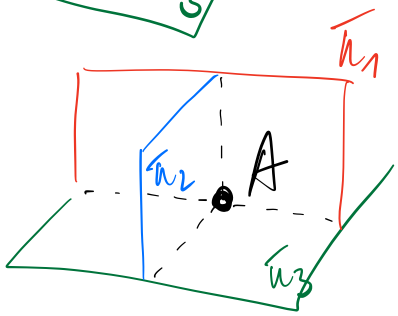
$\{x \in \pi_1 \text{ et } x \in \pi_2 \text{ et } x \in \pi_3\} = \emptyset$



$\pi = \pi = \pi$ pi

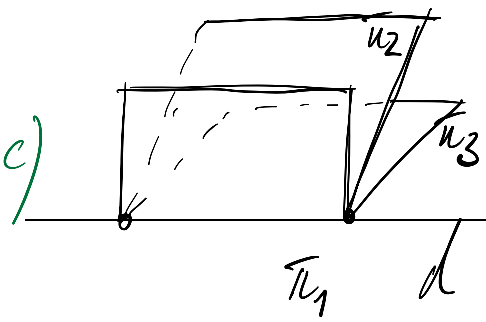


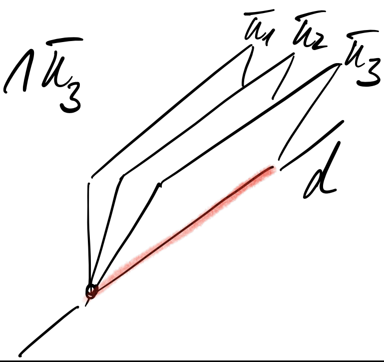
b)



$A \in \pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$

c)





$d \subset \pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$

Exercice 1.2

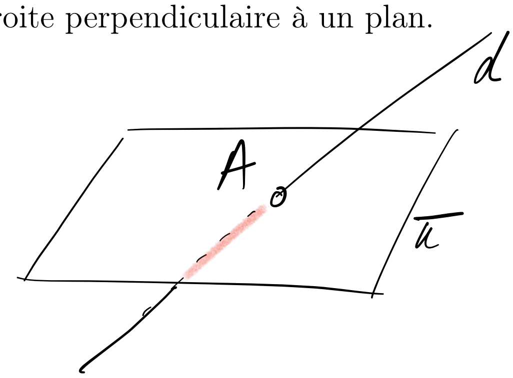
Représenter une figure formée par :

a) une droite coupant un plan ;

b) une droite parallèle à un plan ; non contenue dans le plan.

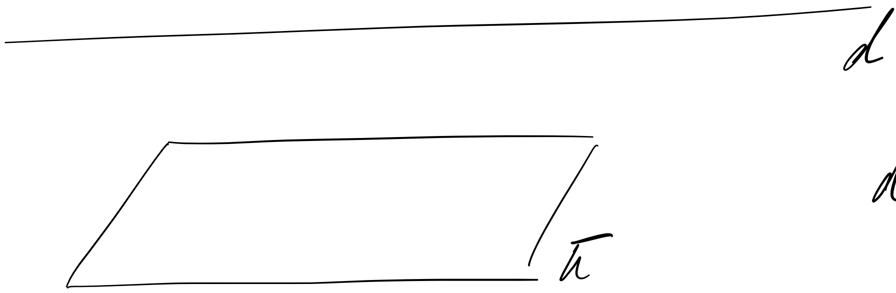
c) une droite perpendiculaire à un plan.

a)



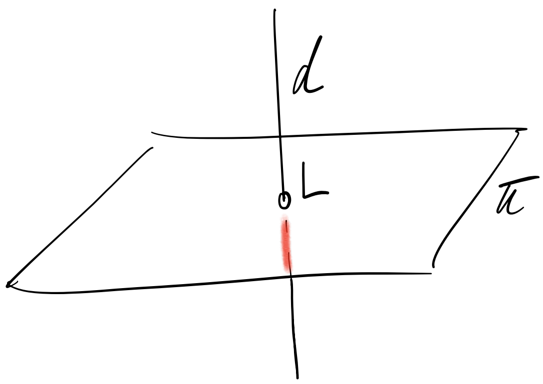
$d \cap \pi = A$

b)



$d \parallel \pi$

c)



$d \perp \pi$

Exercice 1.3

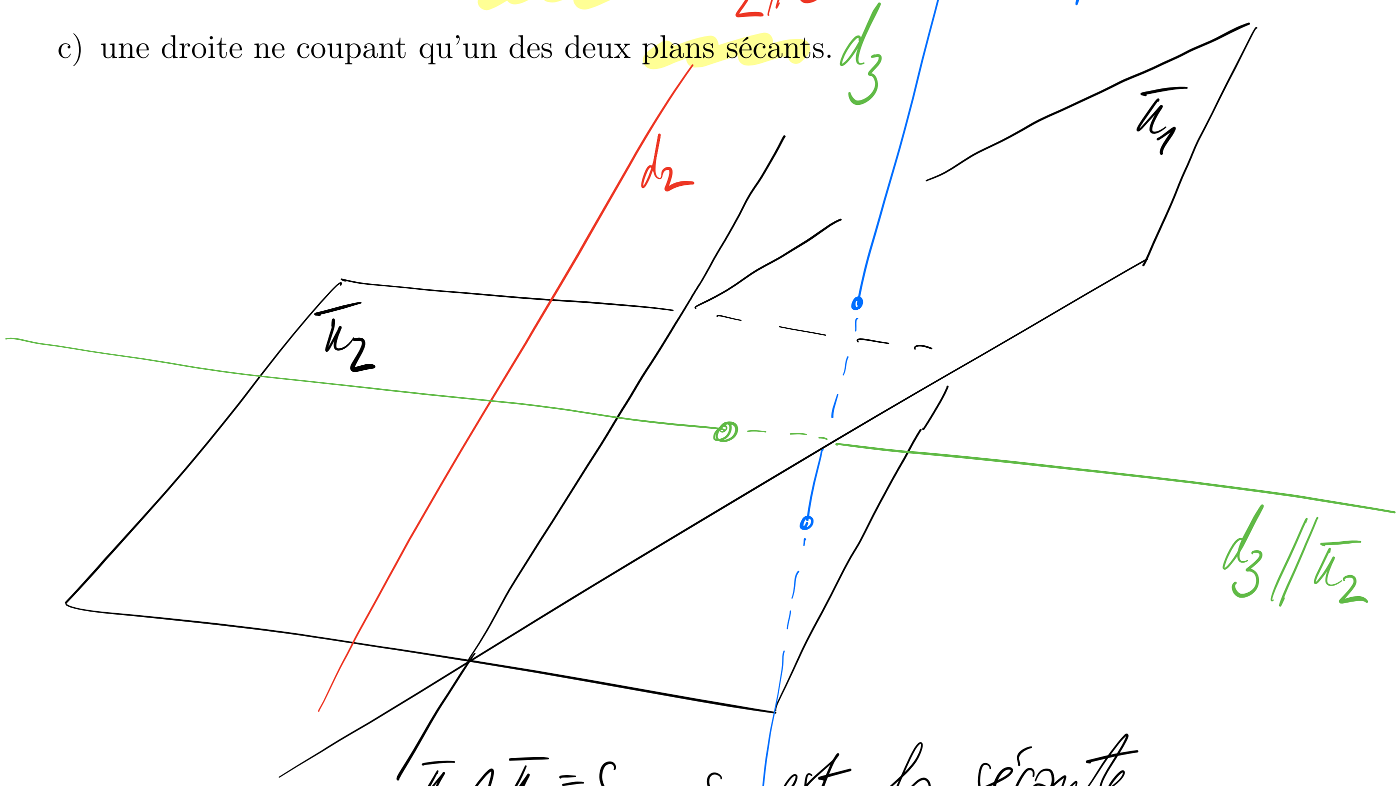
Représenter une figure formée par :

a) une droite coupant deux plans sécants ; en 2 points exact. d_1

b) une droite parallèle à deux plans sécants ; $d_2 \parallel S$

c) une droite ne coupant qu'un des deux plans sécants. d_3

d_1 coupe π_1 et π_2



$\pi_1 \cap \pi_2 = S$, S est la sécante

Exercice 1.4

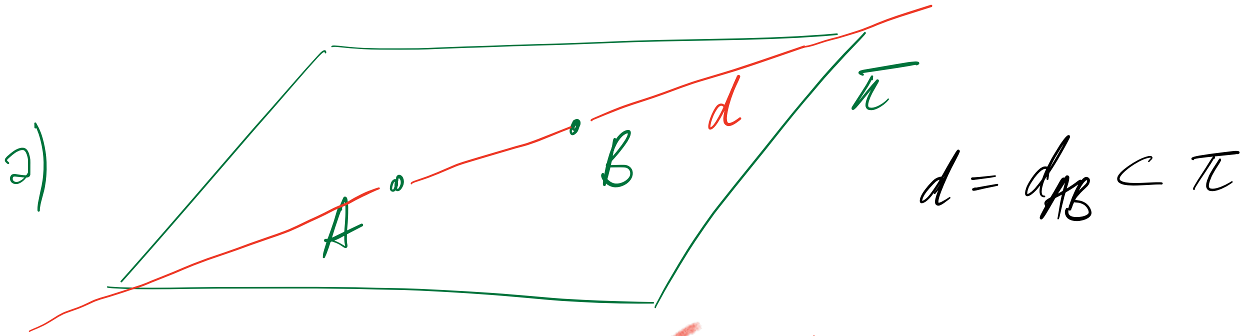
Représenter une figure permettant de visualiser les propriétés suivantes.

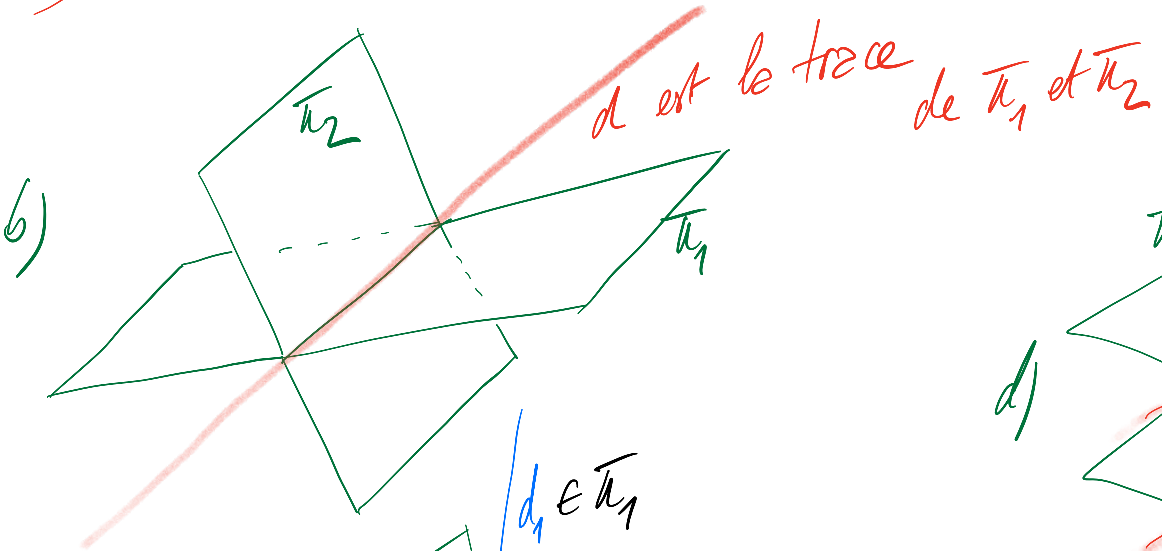
a) Une droite passant par deux points d'un plan est entièrement contenue dans ce plan.

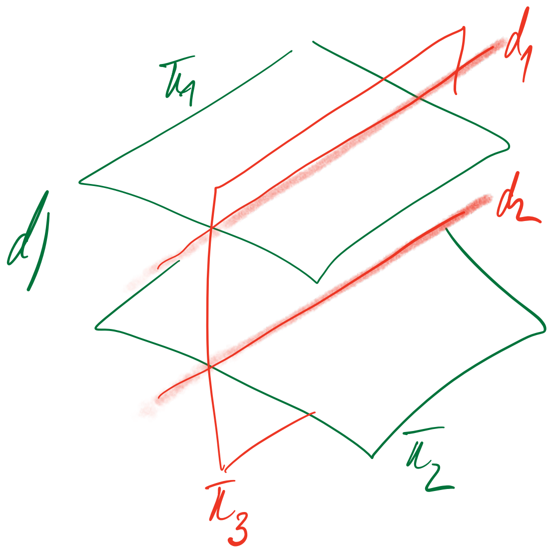
b) Si deux plans se coupent, ils se coupent suivant une droite appelée **trace**.

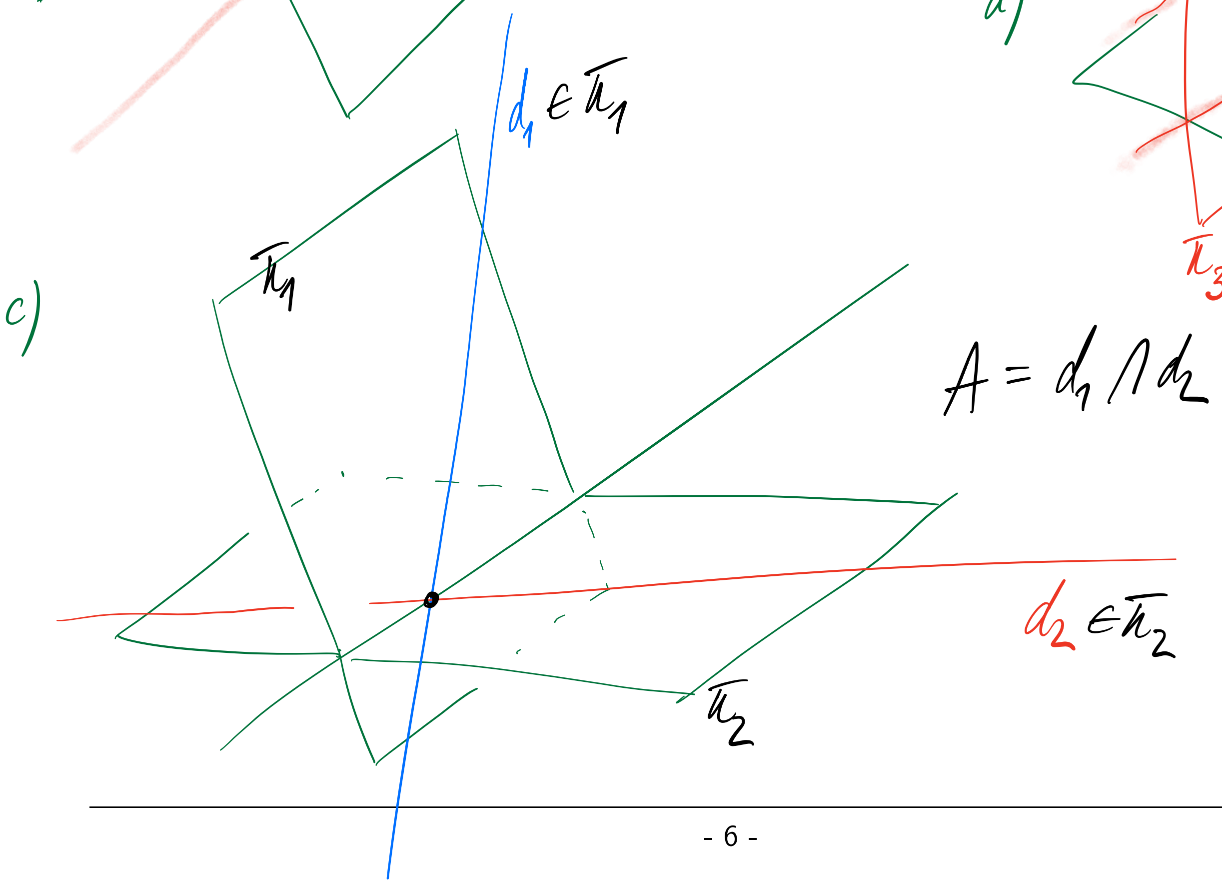
c) Si deux droites se coupent et sont contenues dans des plans distincts, leur point d'intersection appartient à la trace des deux plans.

d) Tout plan coupant deux plans parallèles détermine deux traces parallèles.







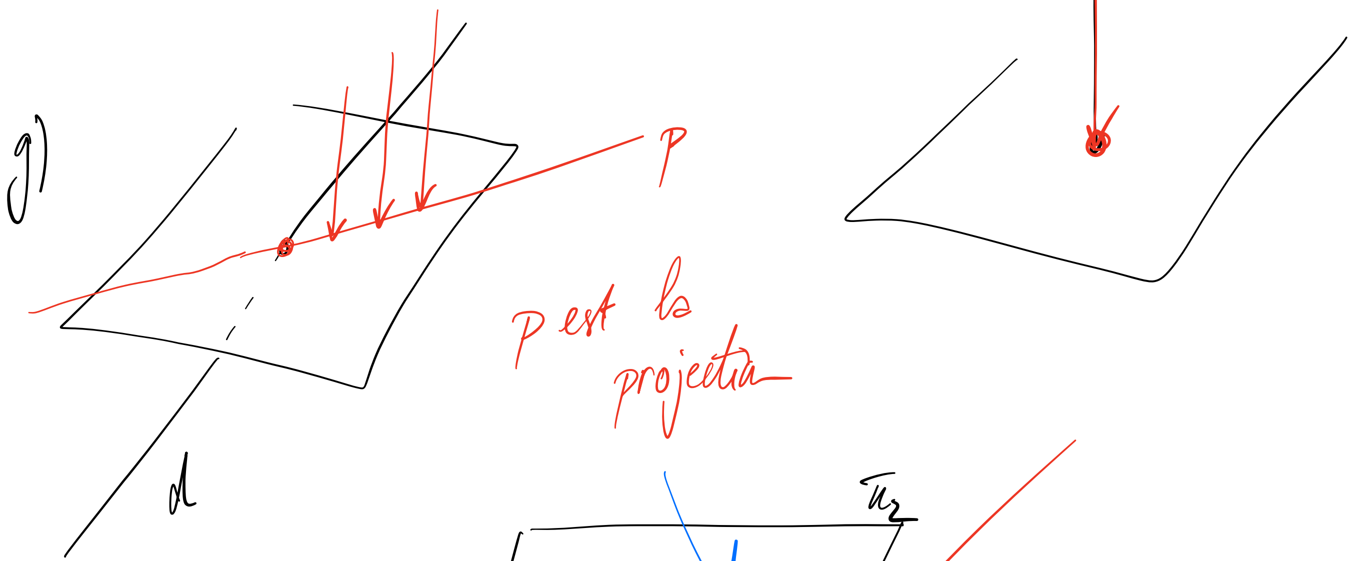


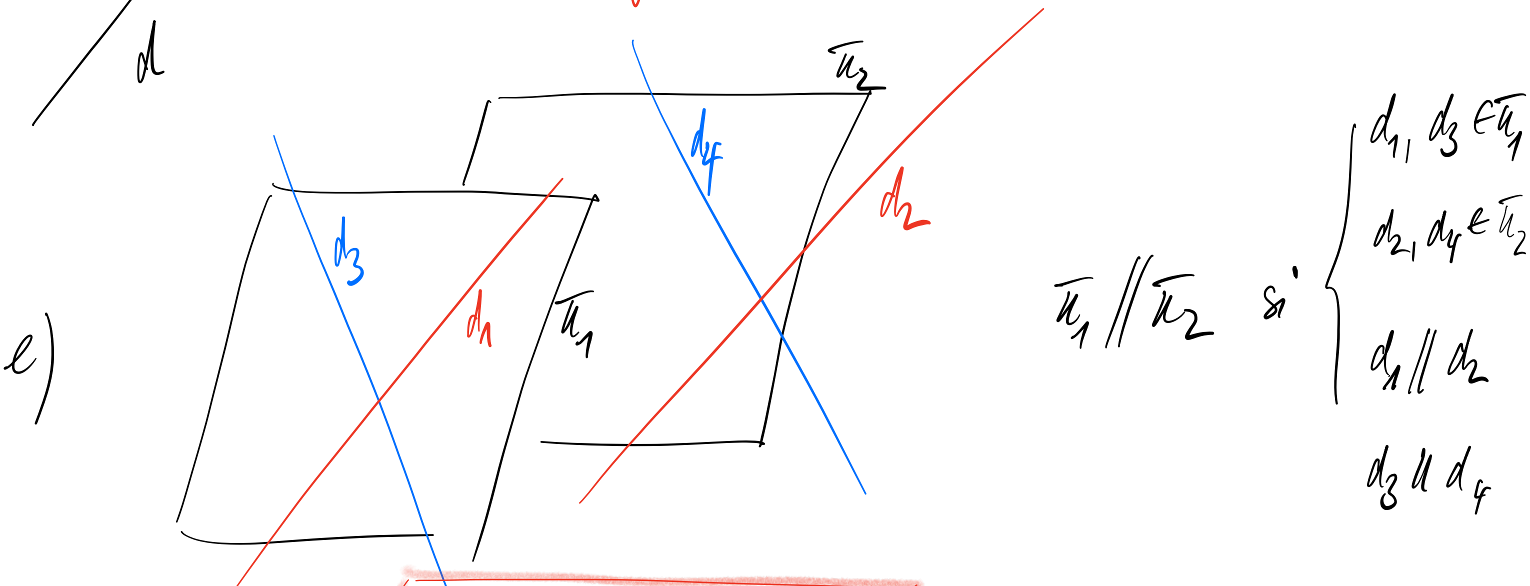
e) Deux plans sont parallèles si l'un contient deux droites sécantes respectivement parallèles à deux droites sécantes de l'autre.

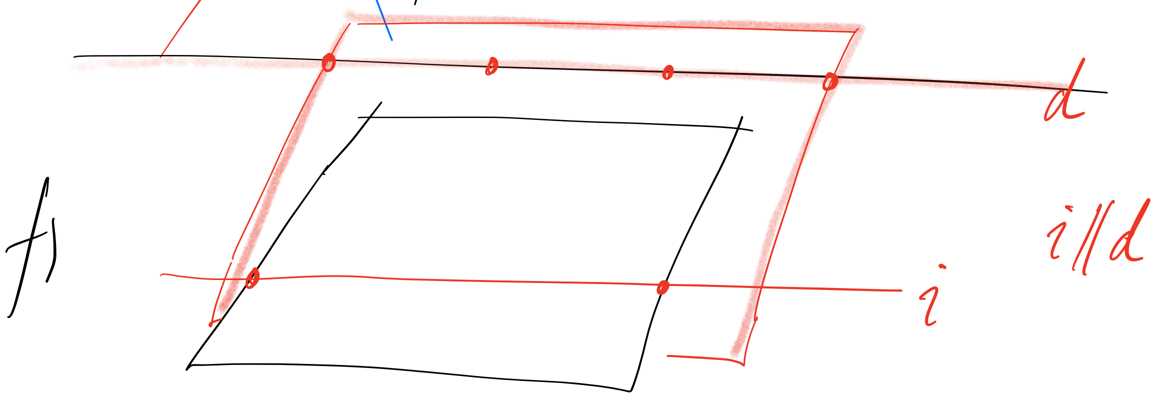
f) Soit une droite d parallèle à un plan π et soit un plan α passant par d et coupant π suivant une droite i. La droite i est parallèle à la droite d.

g) La projection d'une droite sur un plan est une droite, sauf dans le cas où la droite est perpendiculaire au plan.

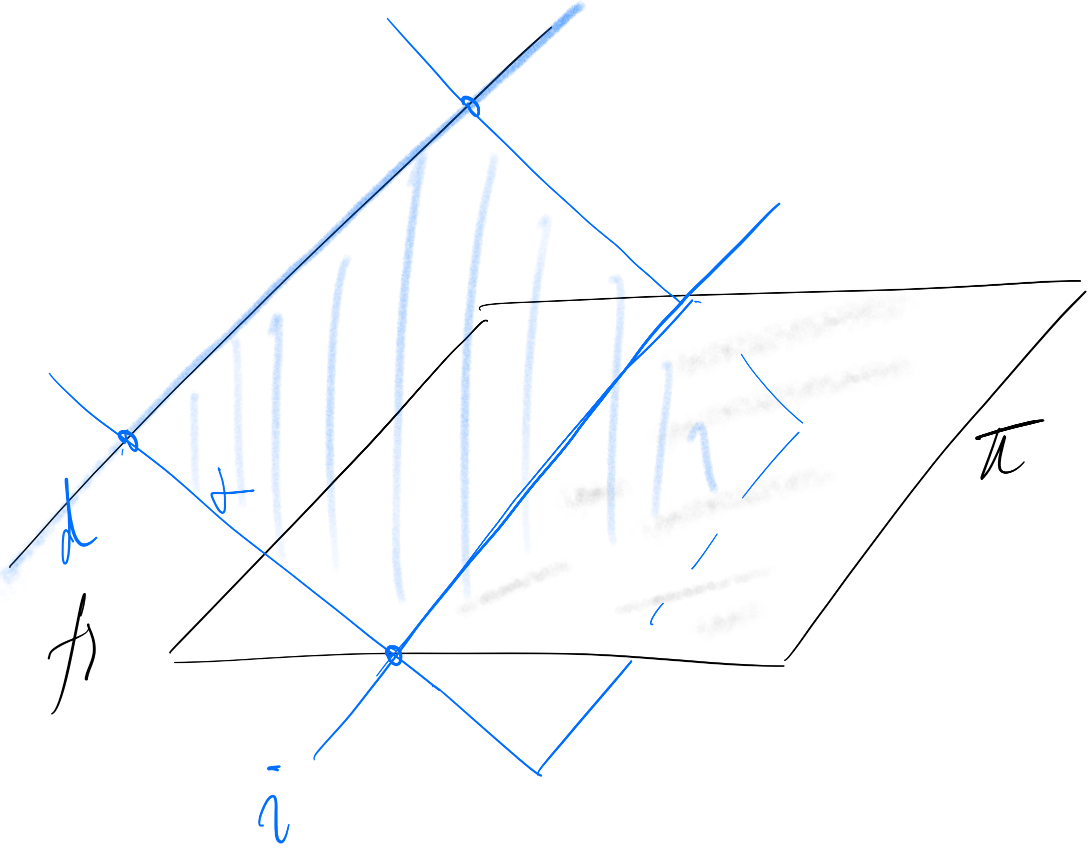
h) Deux plans sont perpendiculaires si l'un d'eux contient une droite perpendiculaire à l'autre.



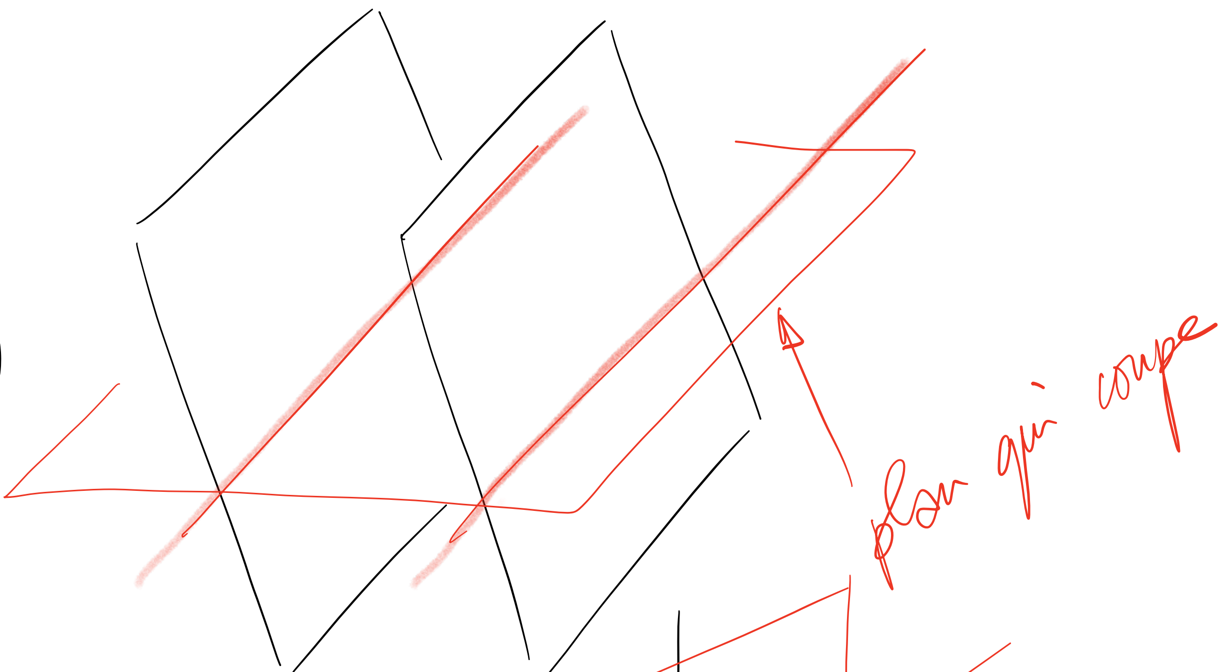




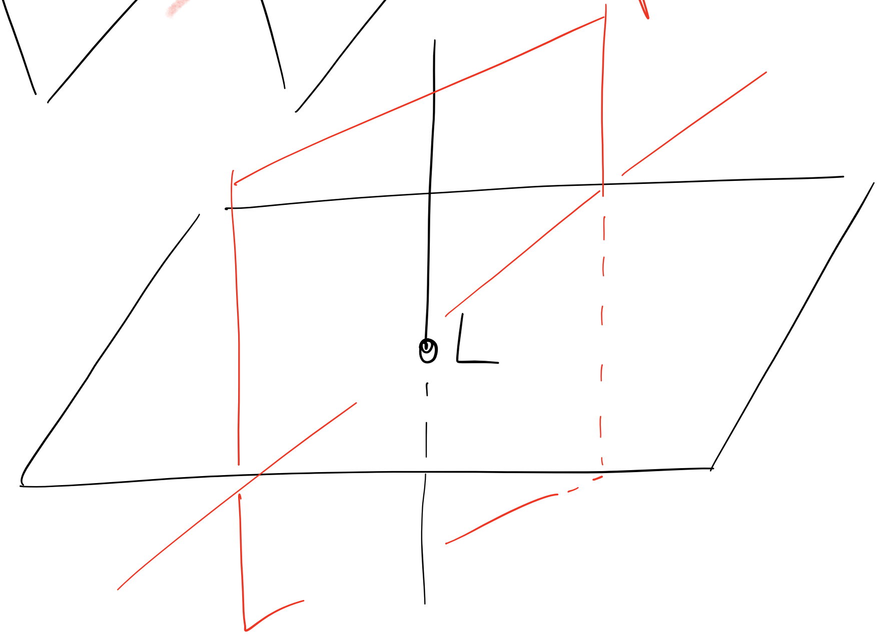
f)



e)



h)



Exercice 1.5

Dans un cube $ABCDEFGH$, représenter :

a) deux droites sécantes et leur intersection ;

b) deux droites gauches ;

c) deux droites perpendiculaires et leur intersection ;

d) quatre droites sécantes en un point ;

e) deux plans parallèles ;

f) deux plans perpendiculaires et leur trace ;

g) deux plans non perpendiculaires et sécants et leur trace ;

h) une droite sécante à deux plans parallèles ;

i) quatre points qui forment un tétraèdre ;

j) quatre points qui forment un tétraèdre régulier ;

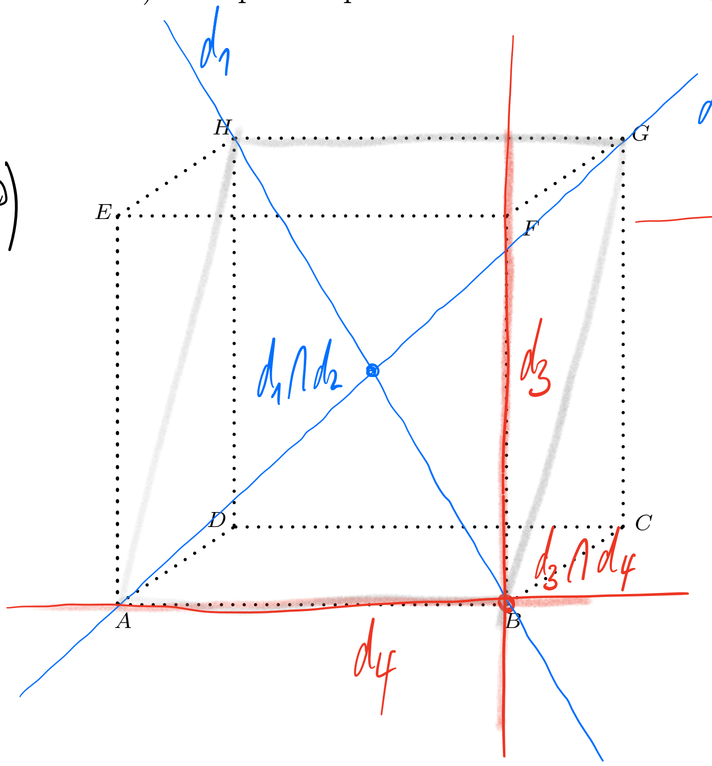
k) quatre points qui forment un rectangle qui n'est pas un carré ;

l) six points sur les arêtes qui forment un hexagone régulier ;

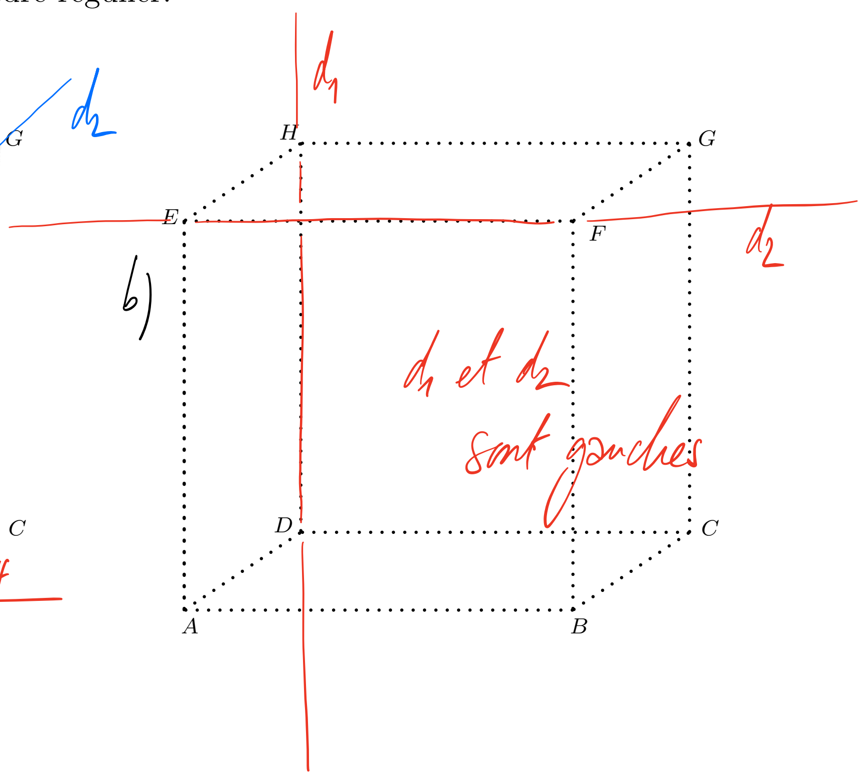
m) peut-on placer cinq points sur les arêtes qui forment un pentagone régulier ?

n) huit points qui forment un octaèdre régulier.

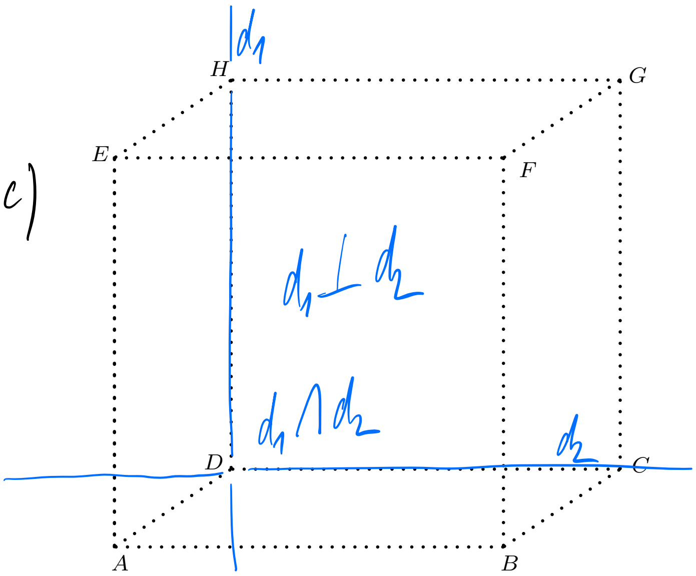
a)



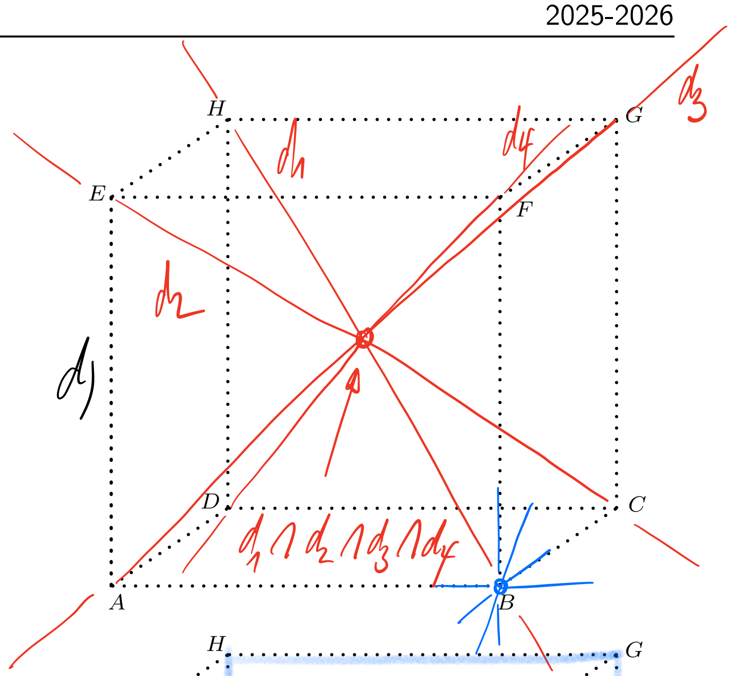
b)



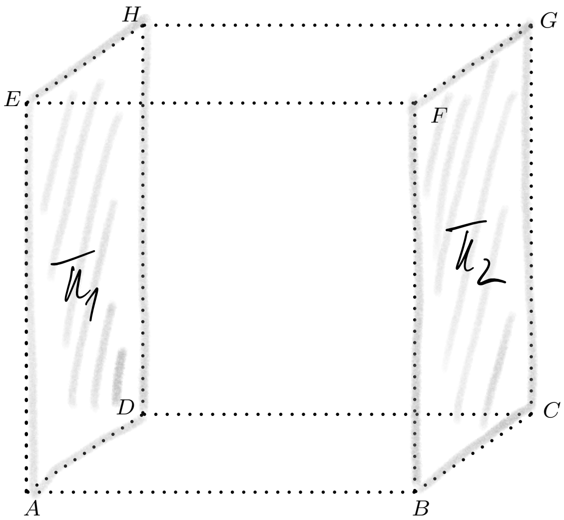
c)


H
G
E
F
D
C
A
B
d_1
$d_1 \perp d_2$
$d_1 \cap d_2$
d_2

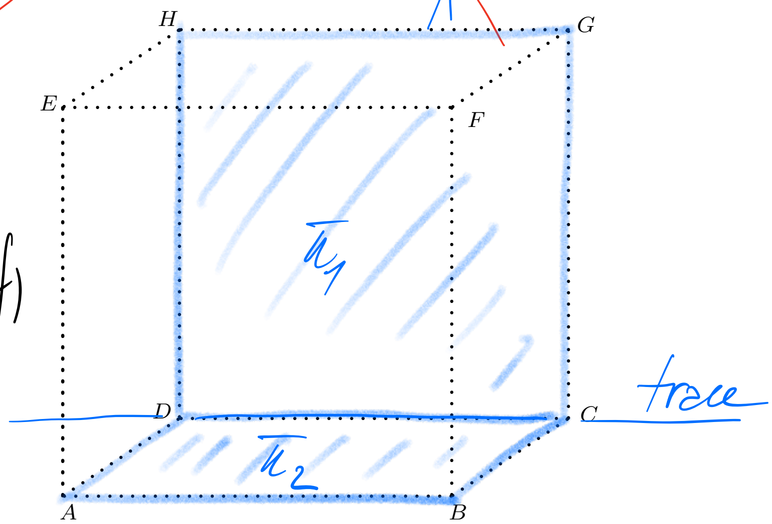
d)


H
G
E
F
D
C
A
B
d_1
d_2
d_3
d_4
$d_1 \cap d_2 \cap d_3 \cap d_4$

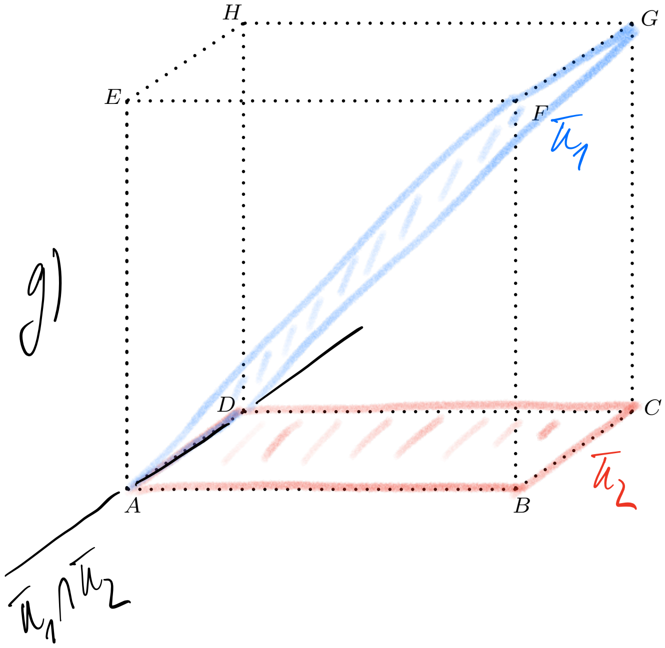
e)


H
G
E
F
D
C
A
B
π_1
π_2

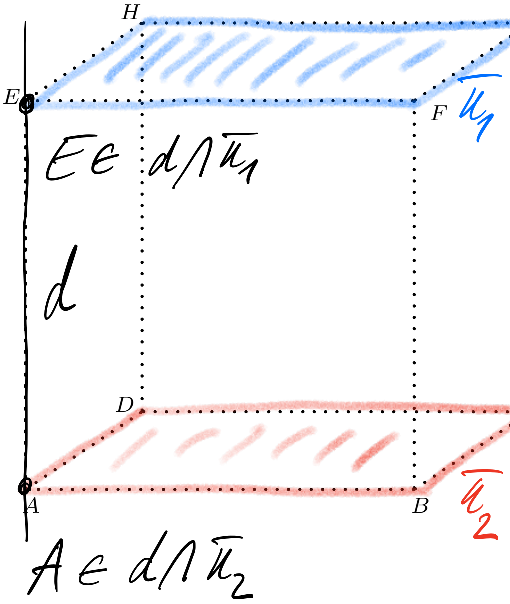
f)


H
G
E
F
D
C
A
B
π_1
π_2
trace

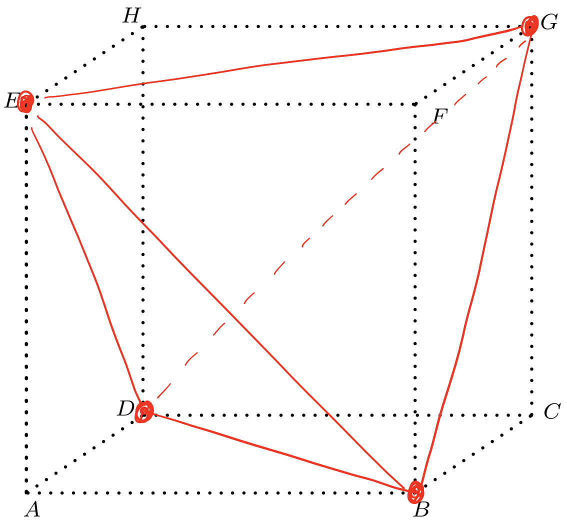
g)


H
G
E
F
D
C
A
B
π_1
π_2
$\pi_1 \cap \pi_2$

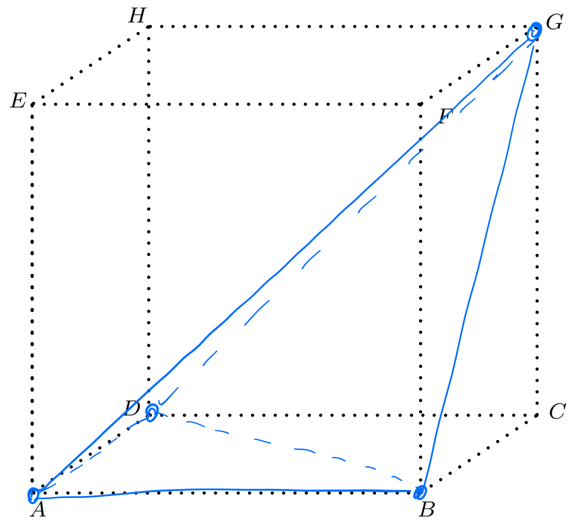
h)


H
G
E
F
D
C
A
B
π_1
$E \in d \cap \pi_1$
d
π_2
$A \in d \cap \pi_2$

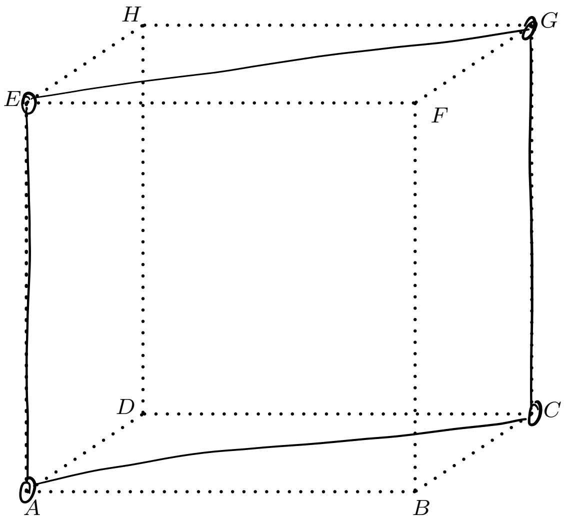
j)


H
G
E
F
D
C
A
B

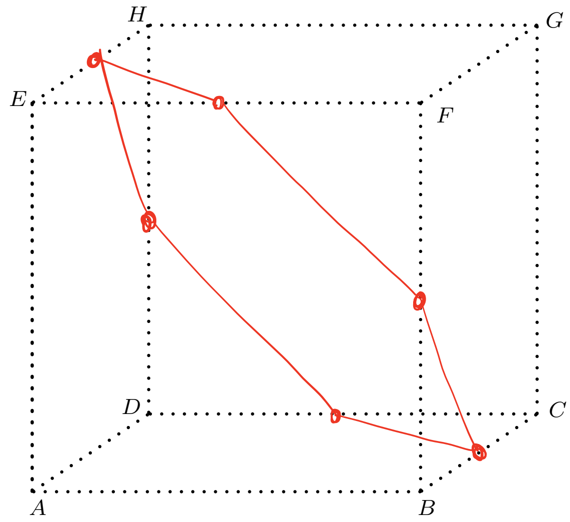
i)


H
G
E
F
D
C
A
B

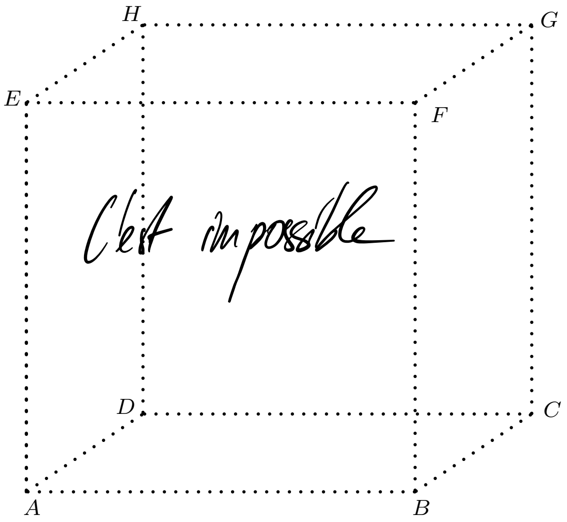
k)


H
G
E
F
D
C
A
B

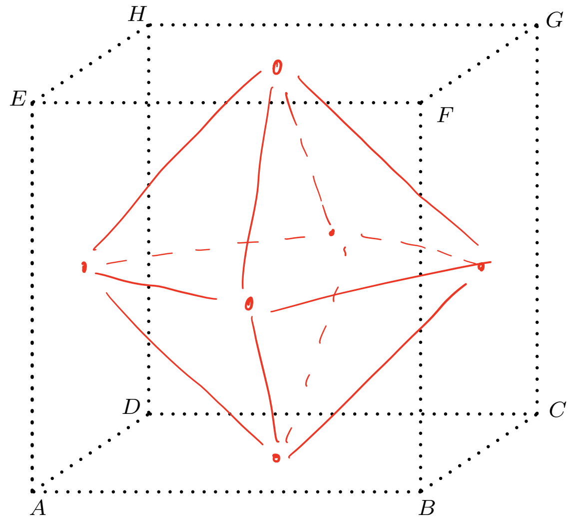
l)

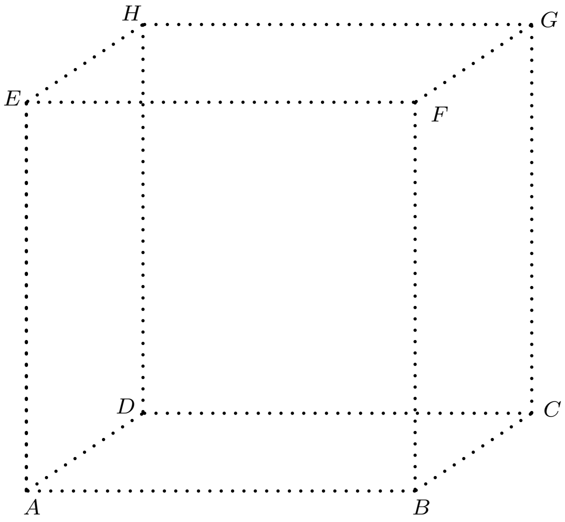

H
G
E
F
D
C
A
B

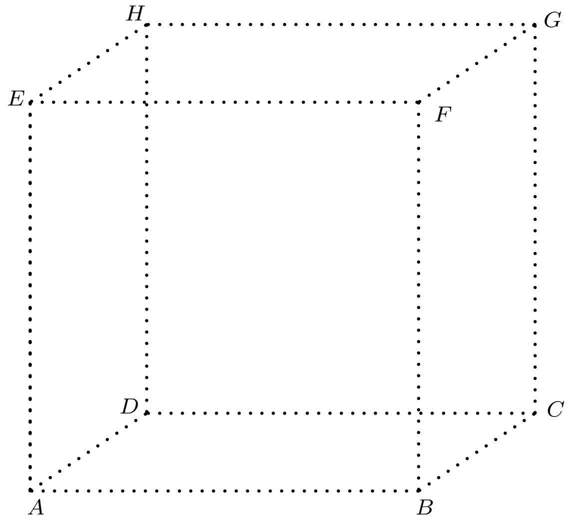
m)

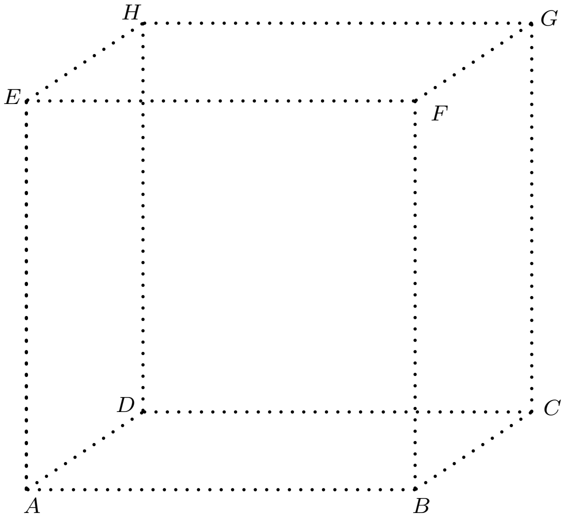

H
G
E
F
C'est impossible
D
C
A
B

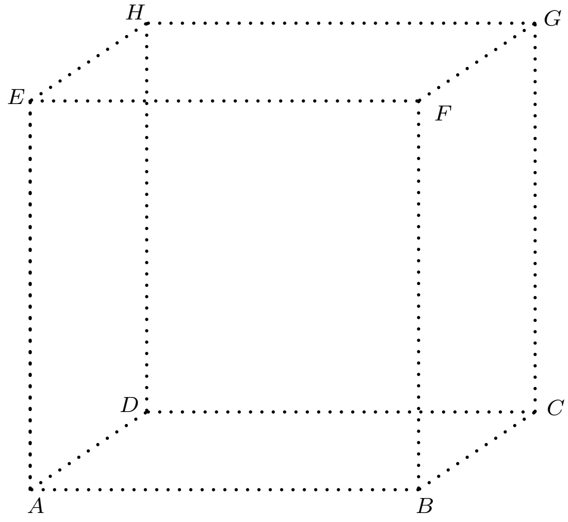
n)

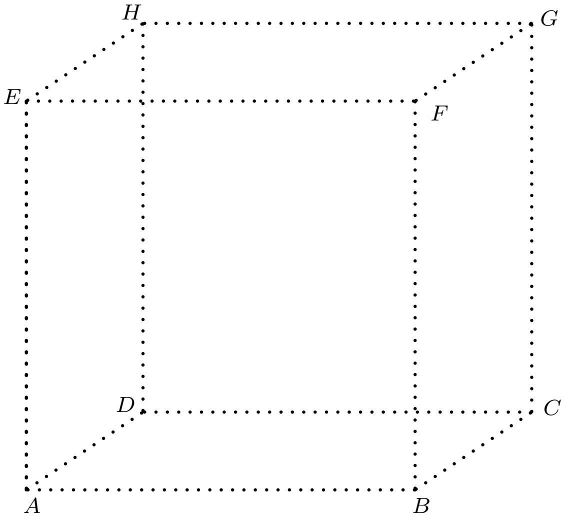

H
G
E
F
D
C
A
B

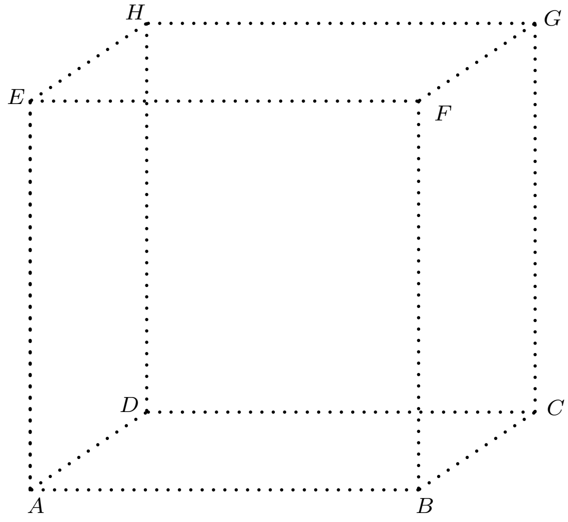

H
G
E
F
D
C
A
B


H
G
E
F
D
C
A
B


H
G
E
F
D
C
A
B


H
G
E
F
D
C
A
B


H
G
E
F
D
C
A
B


H
G
E
F
D
C
A
B

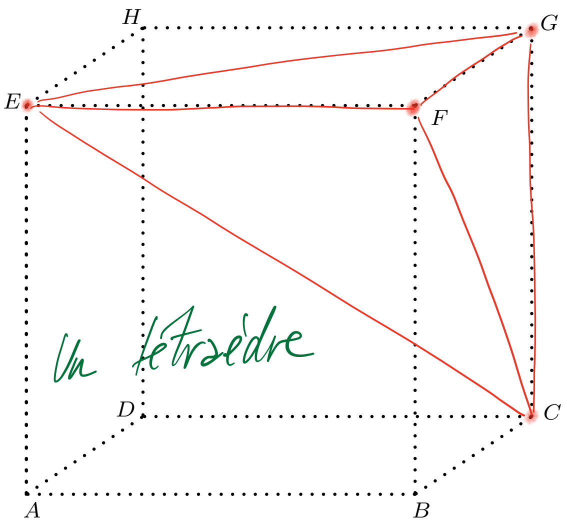
2. L'esquisse en 3D

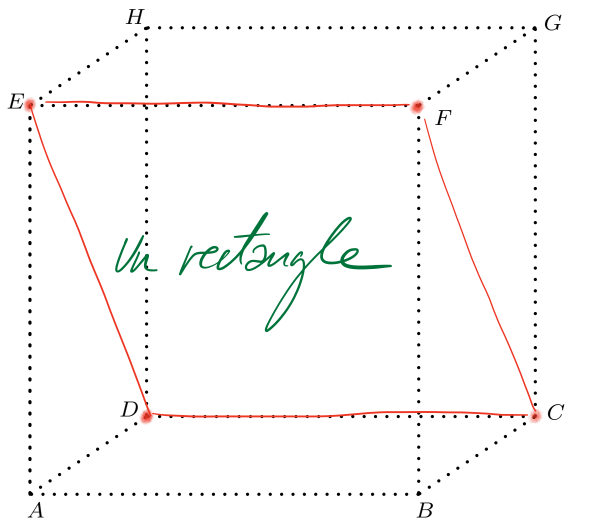
Exercice 2.1

a) Combien de plans différents sont formés par les points E, F, G et C ? $C_3^4 = 4$

b) Combien de plans différents sont formés par les points E, F, D et C ? 1

c) Quel est le nom de la figure formée par ces 4 points ?





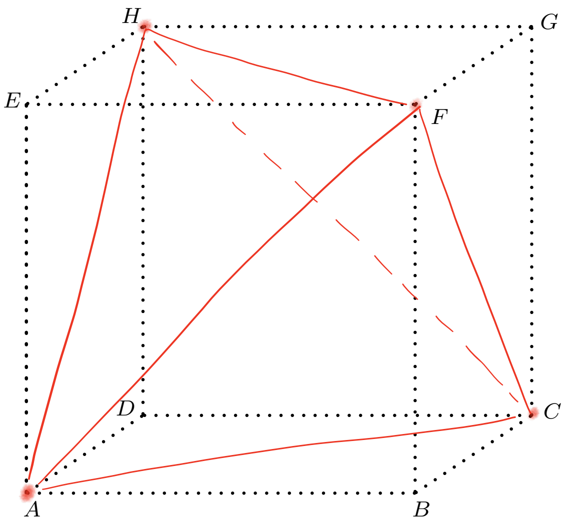
Remarques:

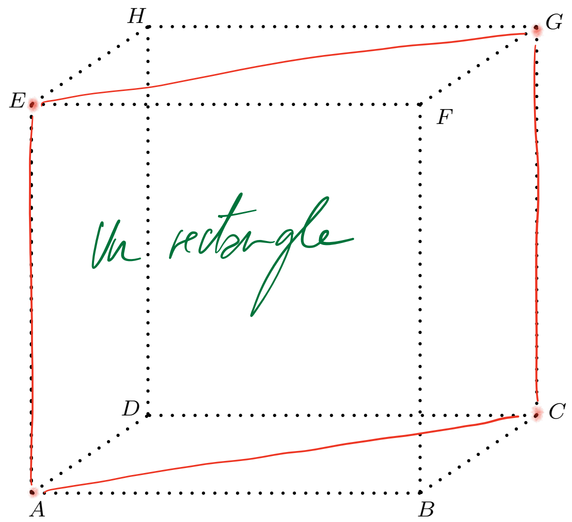
- Trois points non alignés définissent un plan.
- Quatre points sont dits coplanaires s'ils sont contenus dans un même plan.

Exercice 2.2

a) Combien de plans différents sont formés par les points H, F, A et C ? 4

b) Combien de plans différents sont formés par les points E, G, C et A ? 1



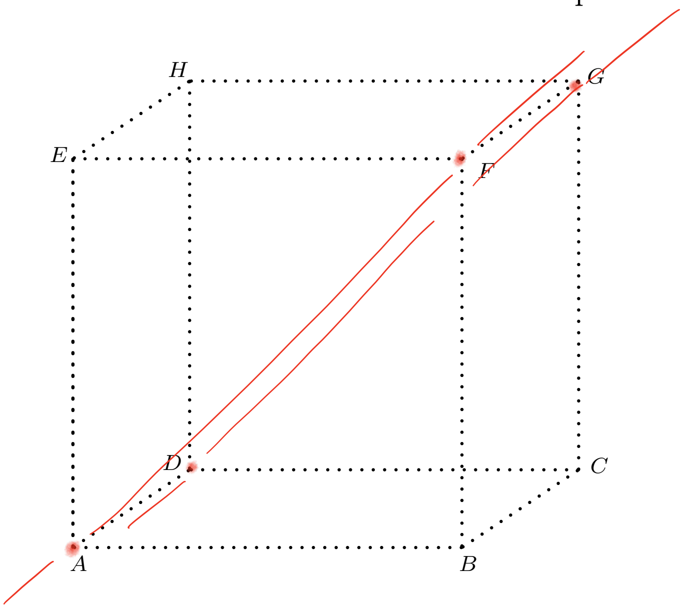


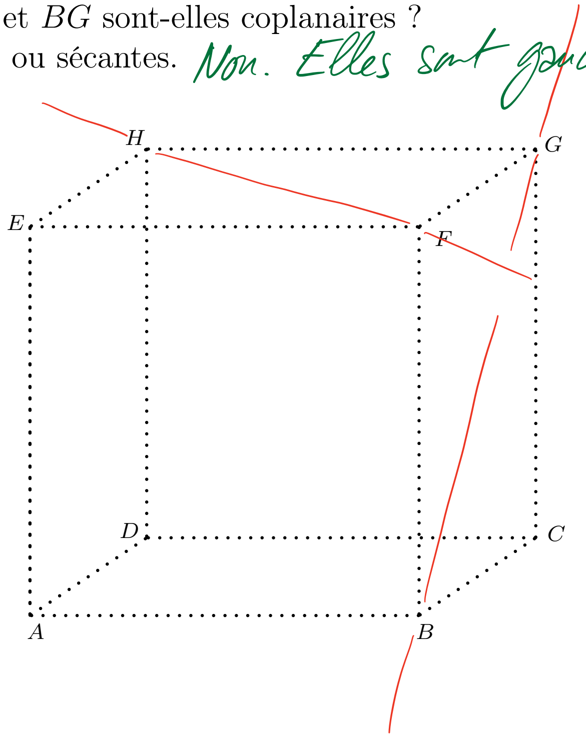
Un tétraèdre régulier

Exercice 2.3

a) Les droites portées par les segments AF et DG sont-elles coplanaires ?
Préciser dans ce cas si elle sont parallèles ou sécantes. Non. Elles sont // (dans l'espace)

b) Les droites portées par les segments HF et BG sont-elles coplanaires ?
Préciser dans ce cas si elle sont parallèles ou sécantes. Non. Elles sont gauches.





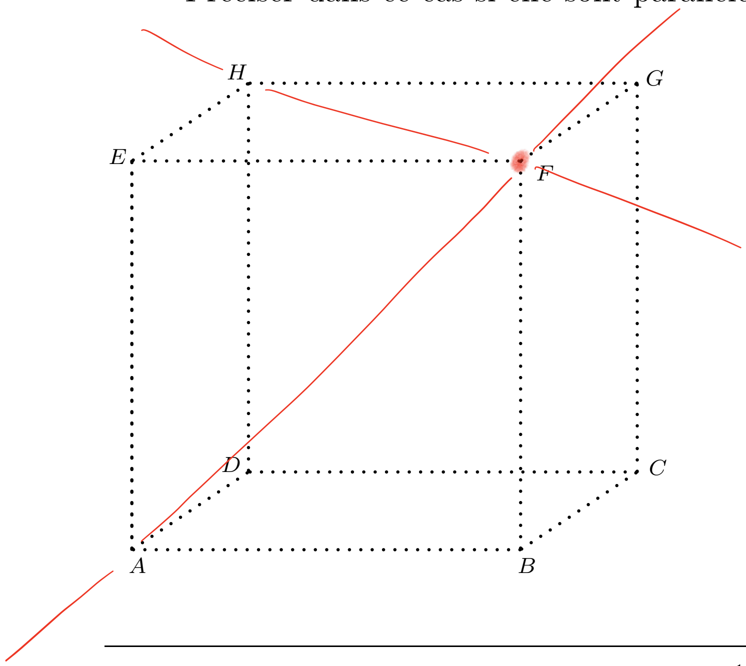
Remarques:

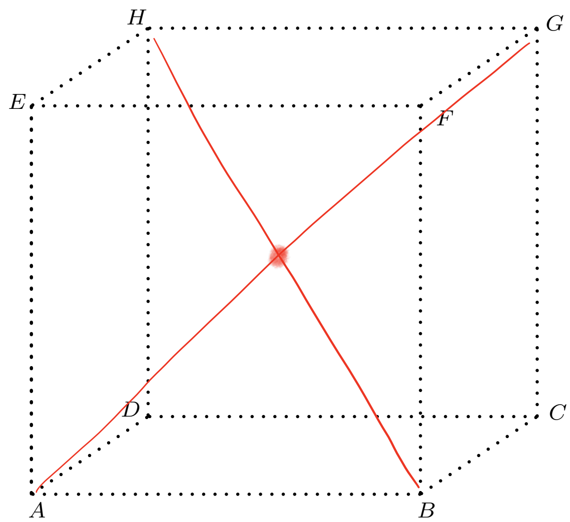
- Deux droites sont coplanaires ⇔ elles sont confondues ou sécantes ou parallèles.
- Deux droites sont dites gauches si elles ne sont pas contenues dans un même plan.

Exercice 2.4

a) Les droites portées par les segments AF et HF sont-elles coplanaires ? Oui
Préciser dans ce cas si elle sont parallèles ou sécantes. Elles sont sécantes

b) Les droites portées par les segments HB et AG sont-elles coplanaires ? Oui
Préciser dans ce cas si elle sont parallèles ou sécantes. Elles sont sécantes

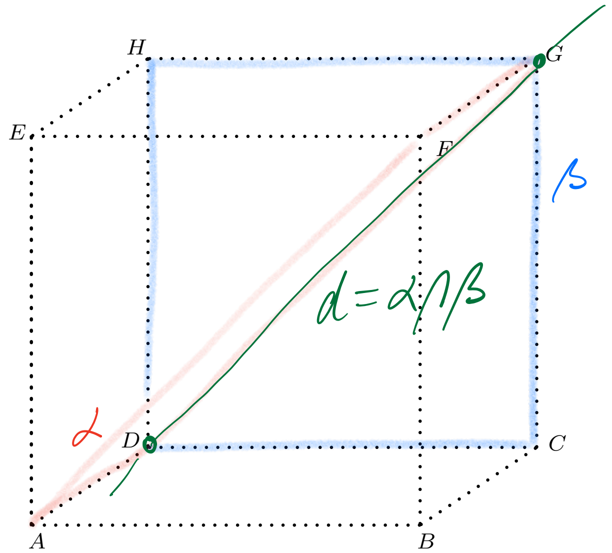


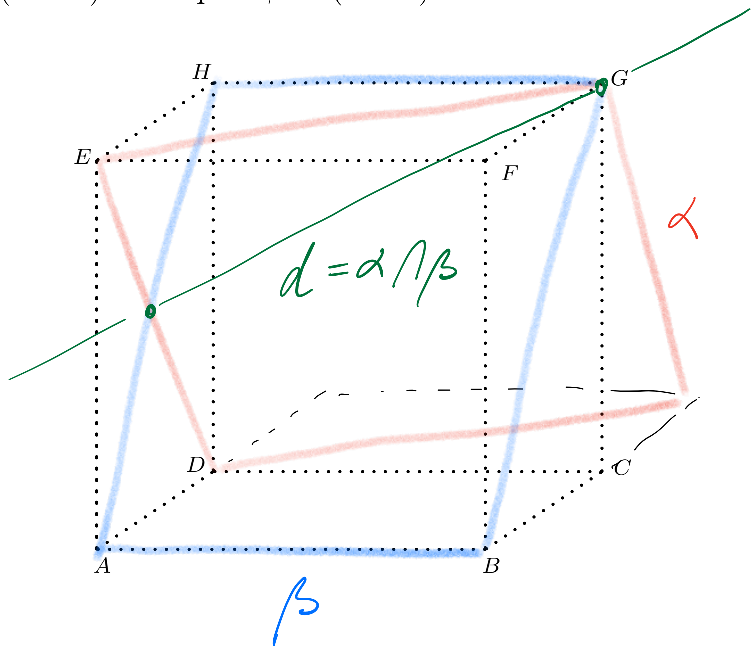


Exercice 2.5

a) Construire l'intersection du plan $\alpha = (AFG)$ et du plan $\beta = (CDG)$.

b) Construire l'intersection du plan $\alpha = (DEG)$ et du plan $\beta = (ABG)$.

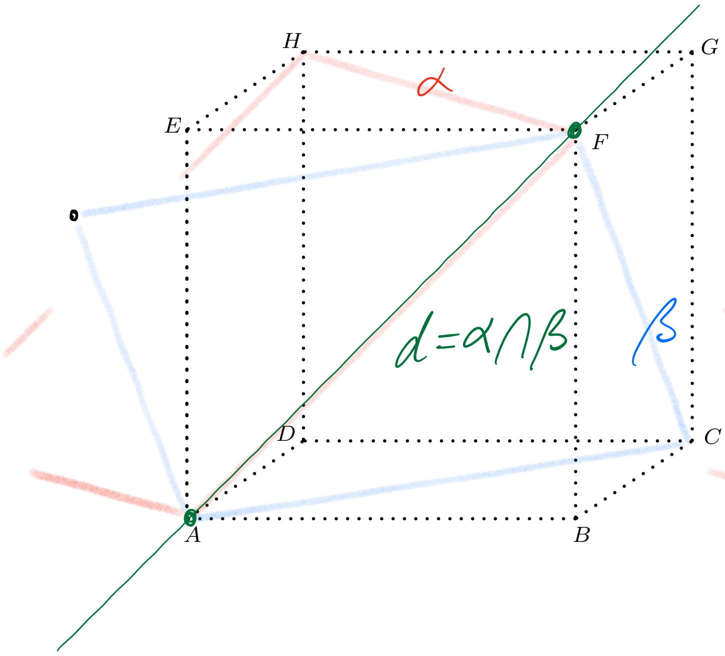


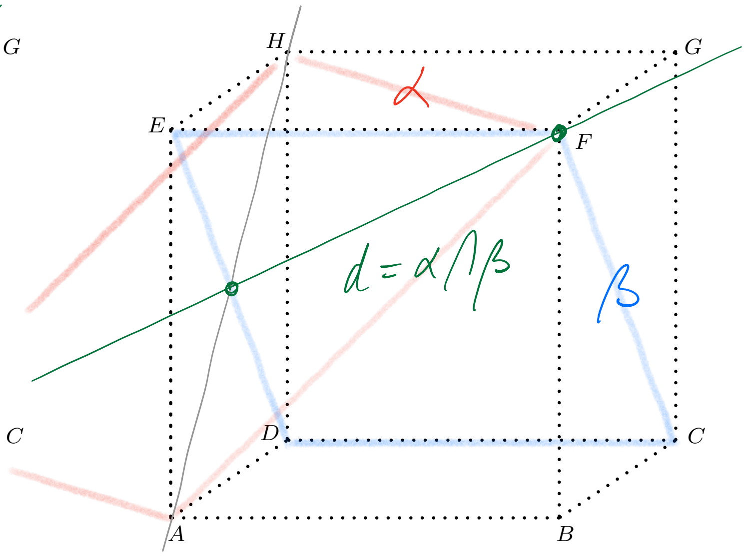


Exercice 2.6

a) Construire l'intersection du plan $\alpha = (AFH)$ et du plan $\beta = (ACF)$.

b) Construire l'intersection du plan $\alpha = (AFH)$ et du plan $\beta = (DCF)$.

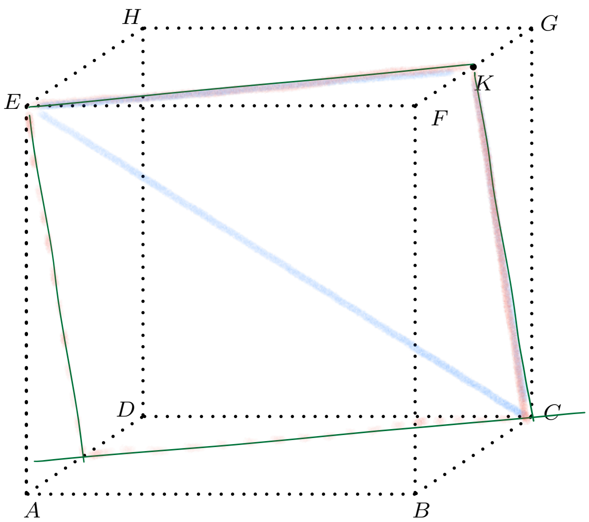


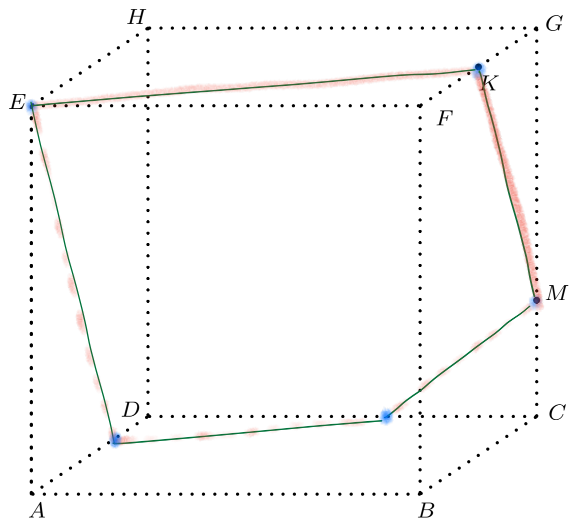


Exercice 2.7

a) Dessiner l'intersection du plan ECK avec le cube.

b) Dessiner l'intersection du plan EKM avec le cube.



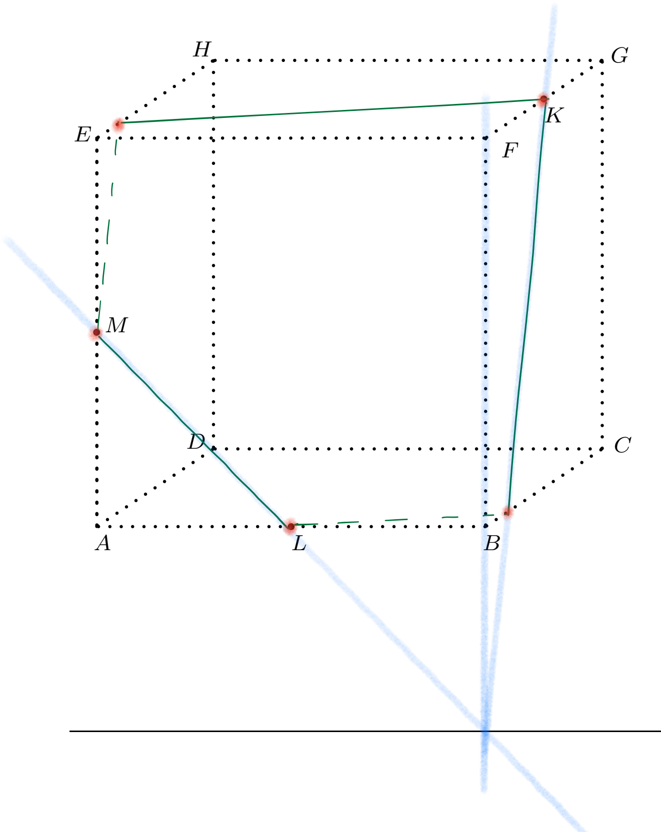


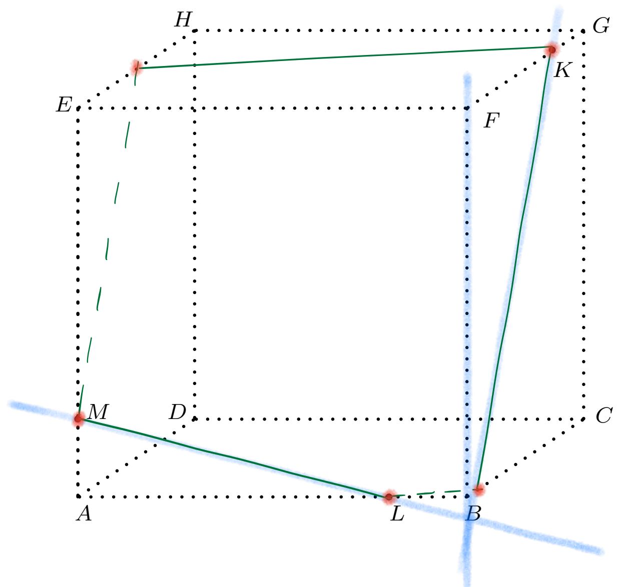
Remarques:

- Tout plan coupant deux plans parallèles y détermine des droites d'intersection parallèles.
- Respecter la visibilité dans le codage des traces du plan ABC sur les faces du cube.

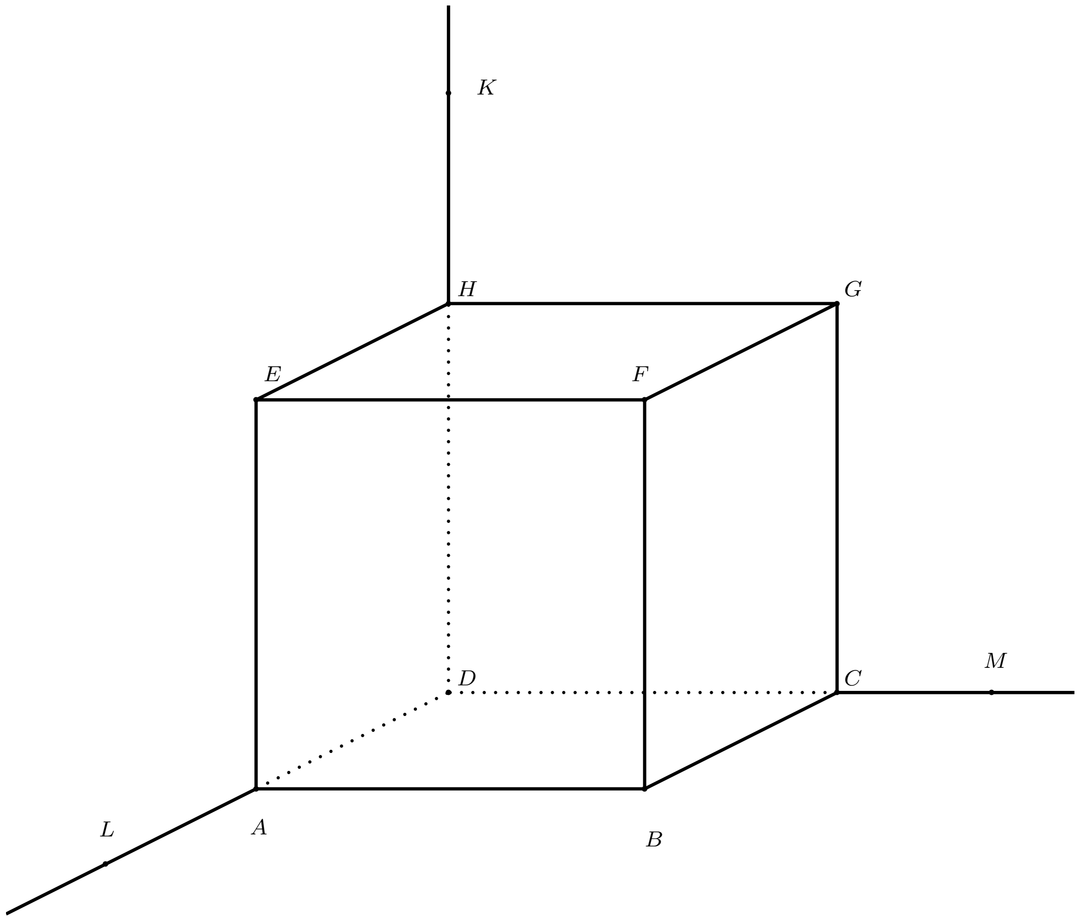
Exercice 2.8

Dessiner l'intersection du plan MLK avec le cube.



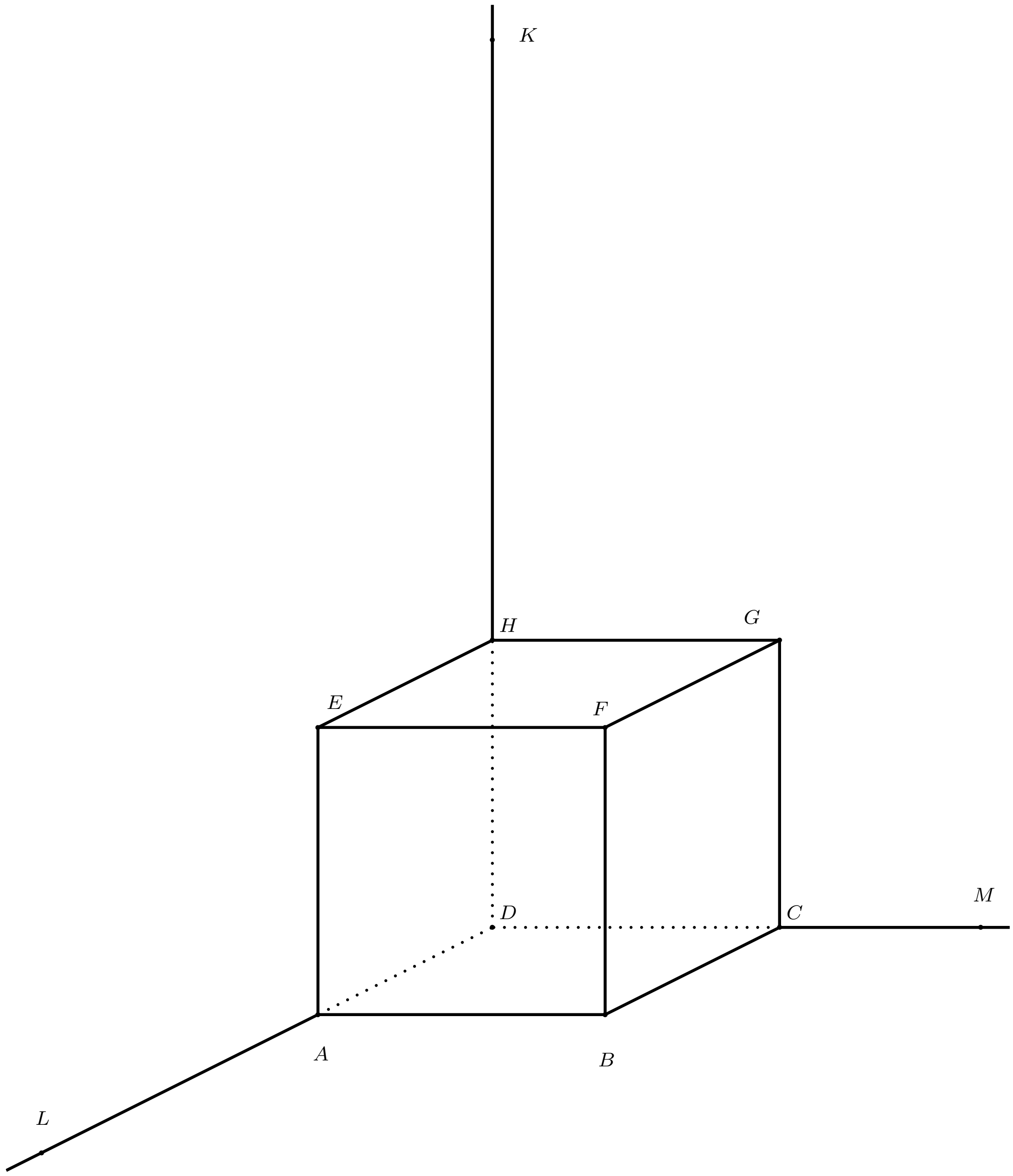


Exercice 2.9
Construire avec visibilité l'intersection du cube avec le plan KLM.

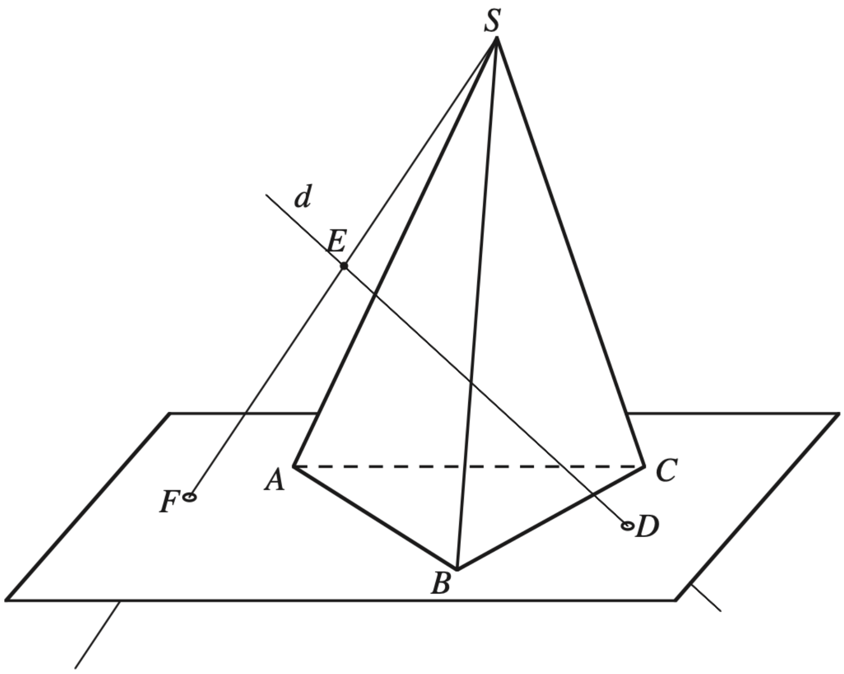


Exercice 2.10

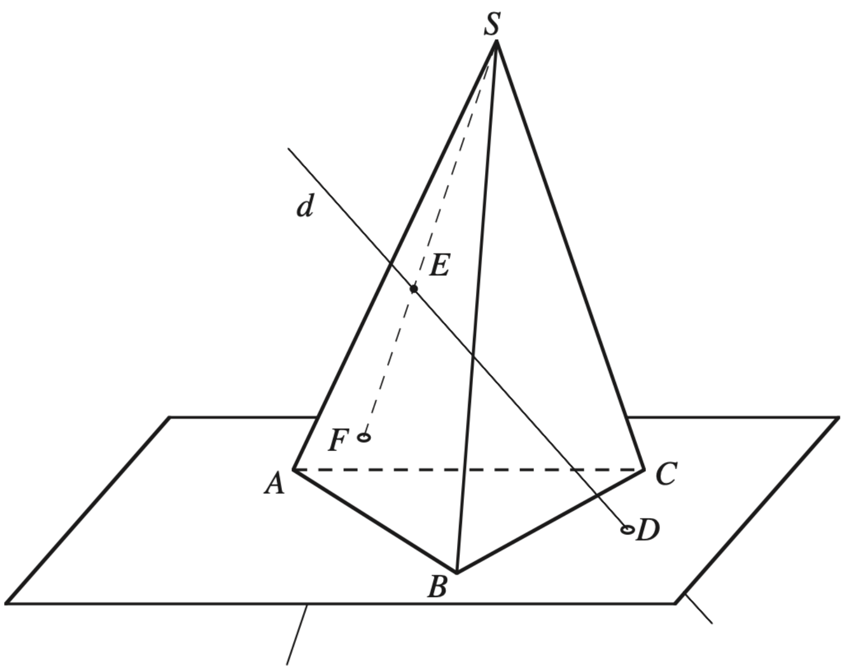
Construire avec visibilité l'intersection du cube avec le plan KLM.



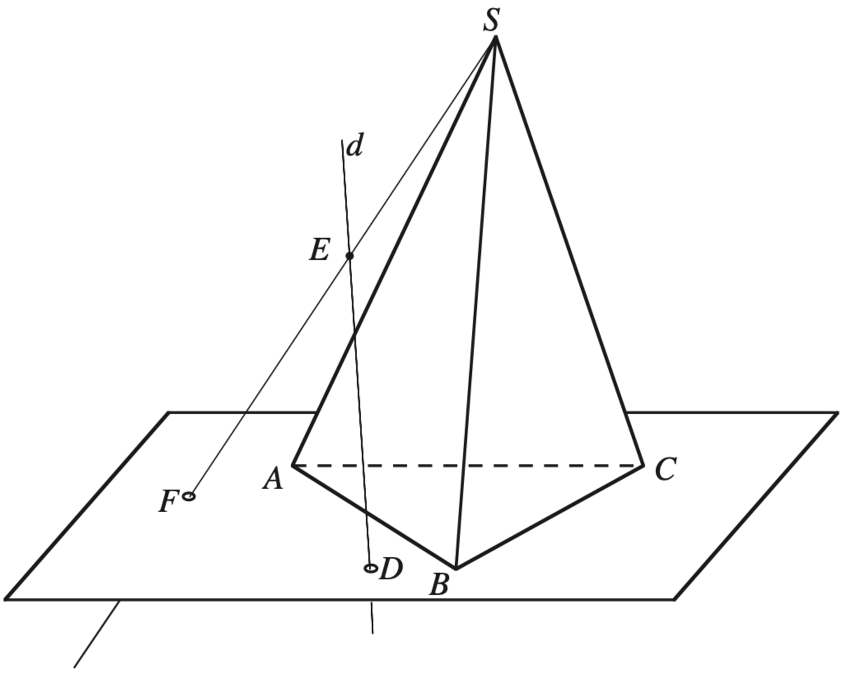
Exercice 2.11
Construire l'intersection de la pyramide $SABC$ avec la droite d.
Les points D et F sont dans le plan ABC.



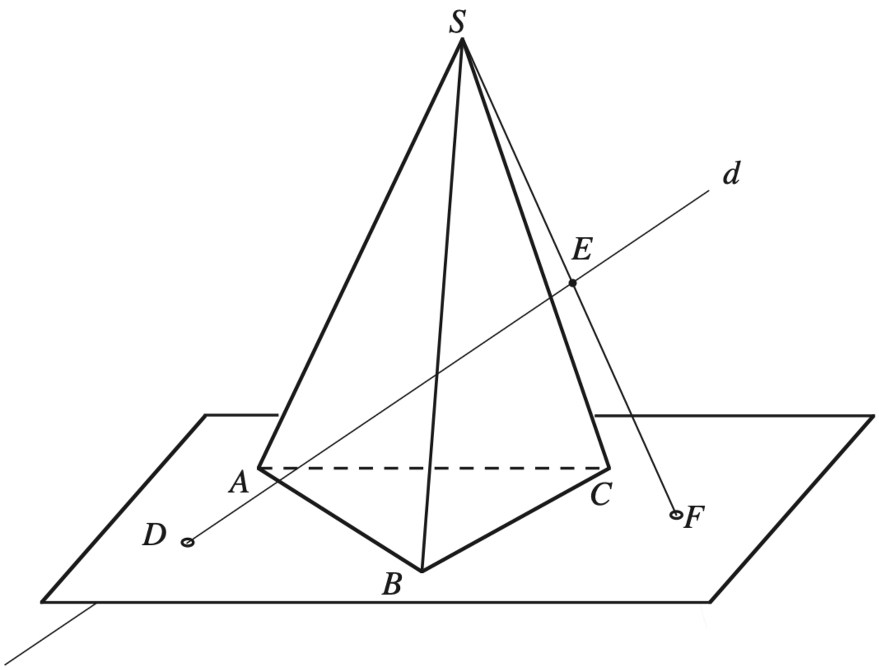
Exercice 2.12
Construire l'intersection de la pyramide $SABC$ avec la droite d.
Les points D et F sont dans le plan ABC.



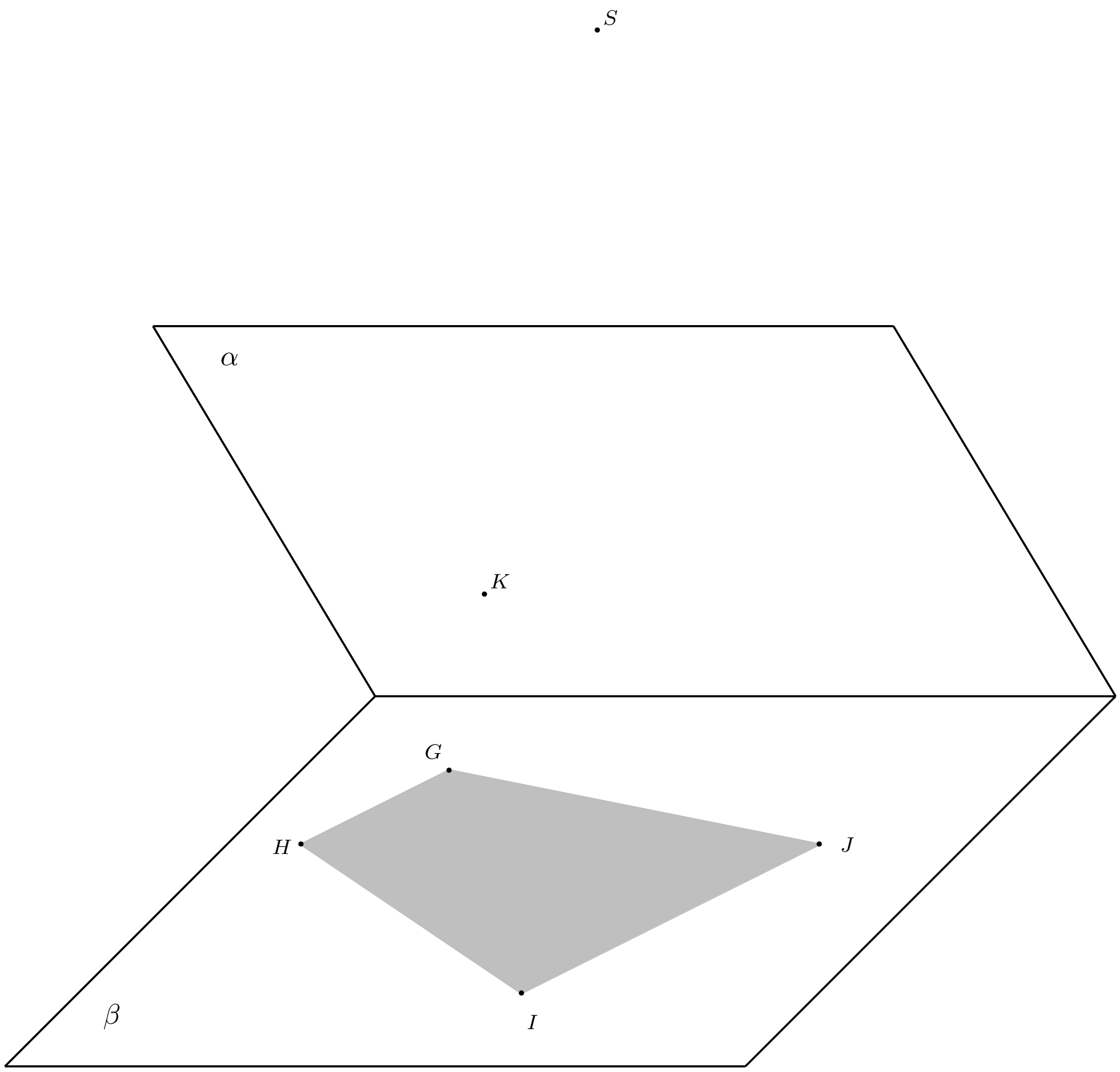
Exercice 2.13
Construire l'intersection de la pyramide $SABC$ avec la droite d.
Les points D et F sont dans le plan ABC.



Exercice 2.14
Construire l'intersection de la pyramide $SABC$ avec la droite d.
Les points D et F sont dans le plan ABC.

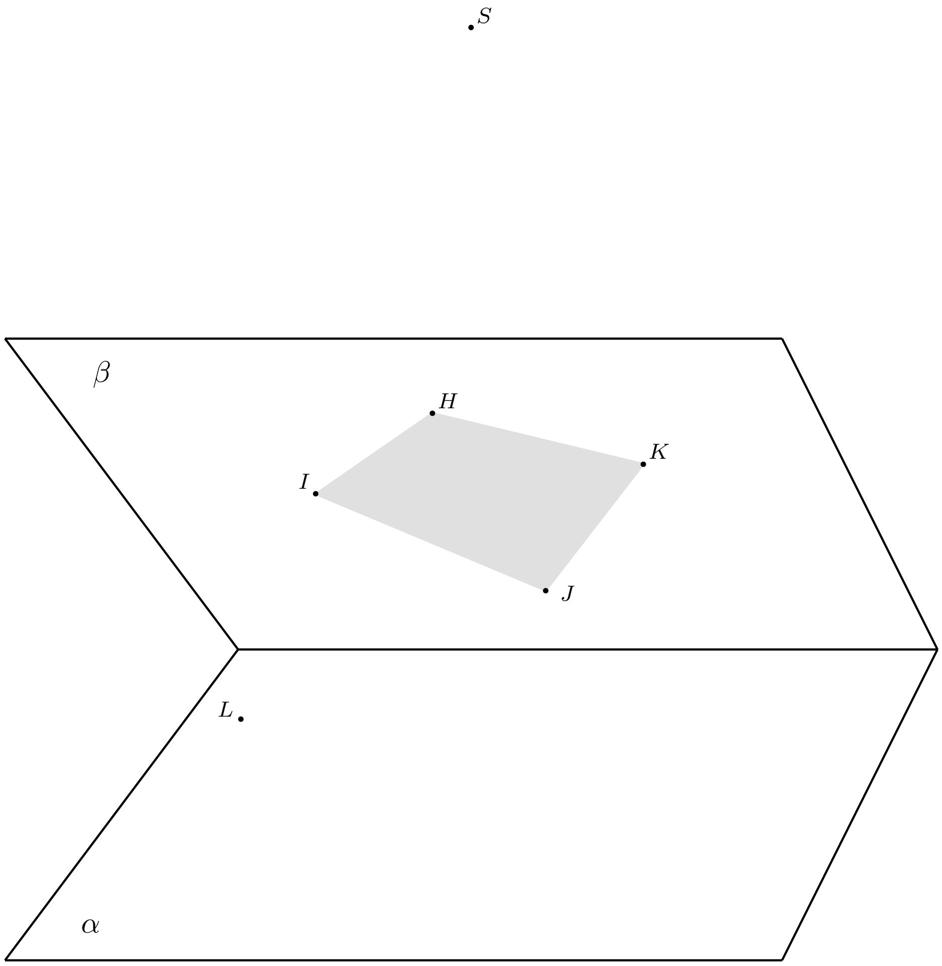


Exercice 2.15
La base de la pyramide $SGHIJ$ se situe dans le plan β.
La droite SG coupe le plan α en k.
Déterminer l'intersection de la pyramide $SGHIJ$ avec le plan α.

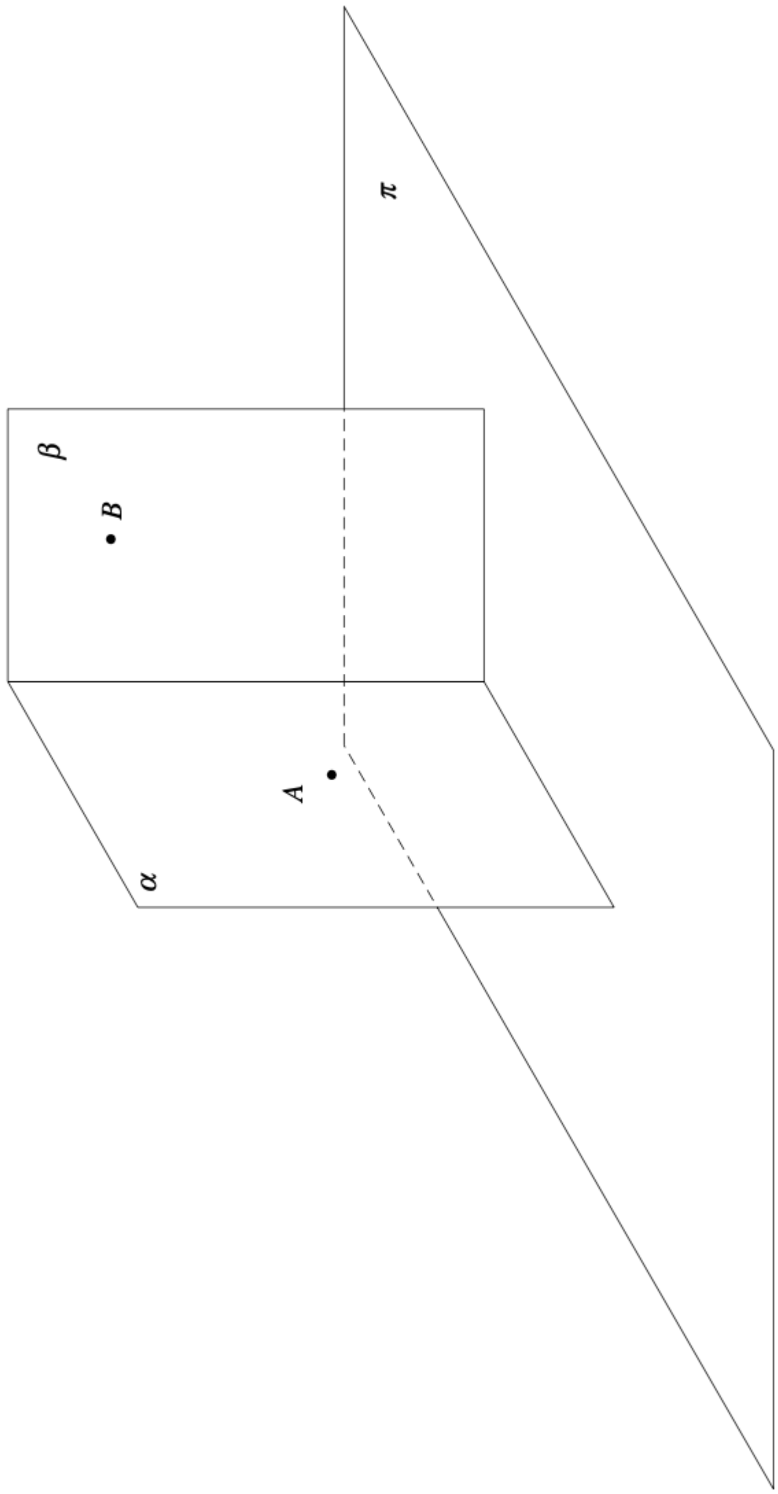


Exercice 2.16

La base d'une pyramide $SLMNP$ se situe dans le plan α.
Le quadrilatère $HIJK$ représente l'intersection de la pyramide $SLMNP$ avec le plan β.
Déterminer les points M, N et P.

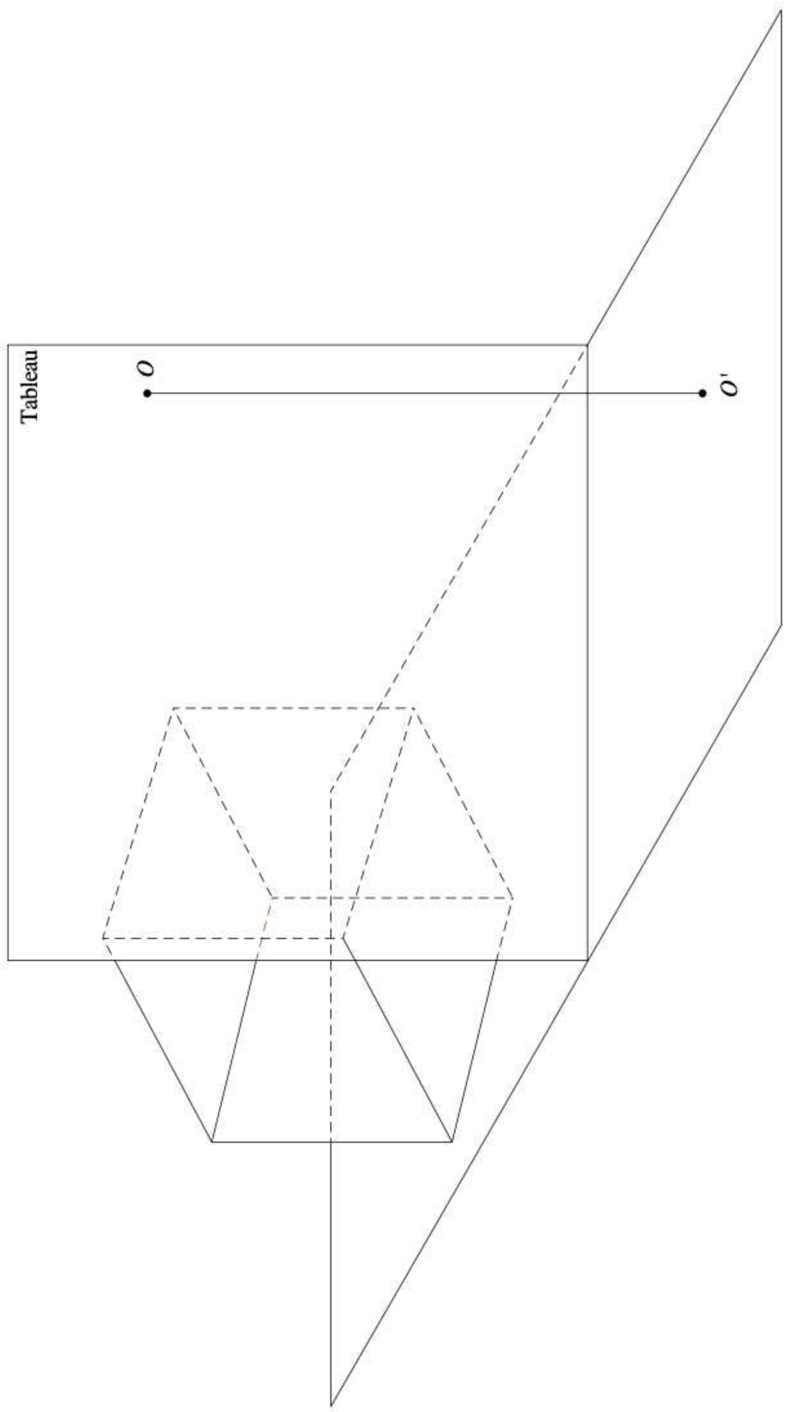


Exercice 2.17
Le point A est dans le plan α et le point B est dans le plan β.
Construire l'intersection de la droite AB avec la plan π.



Exercice 2.18

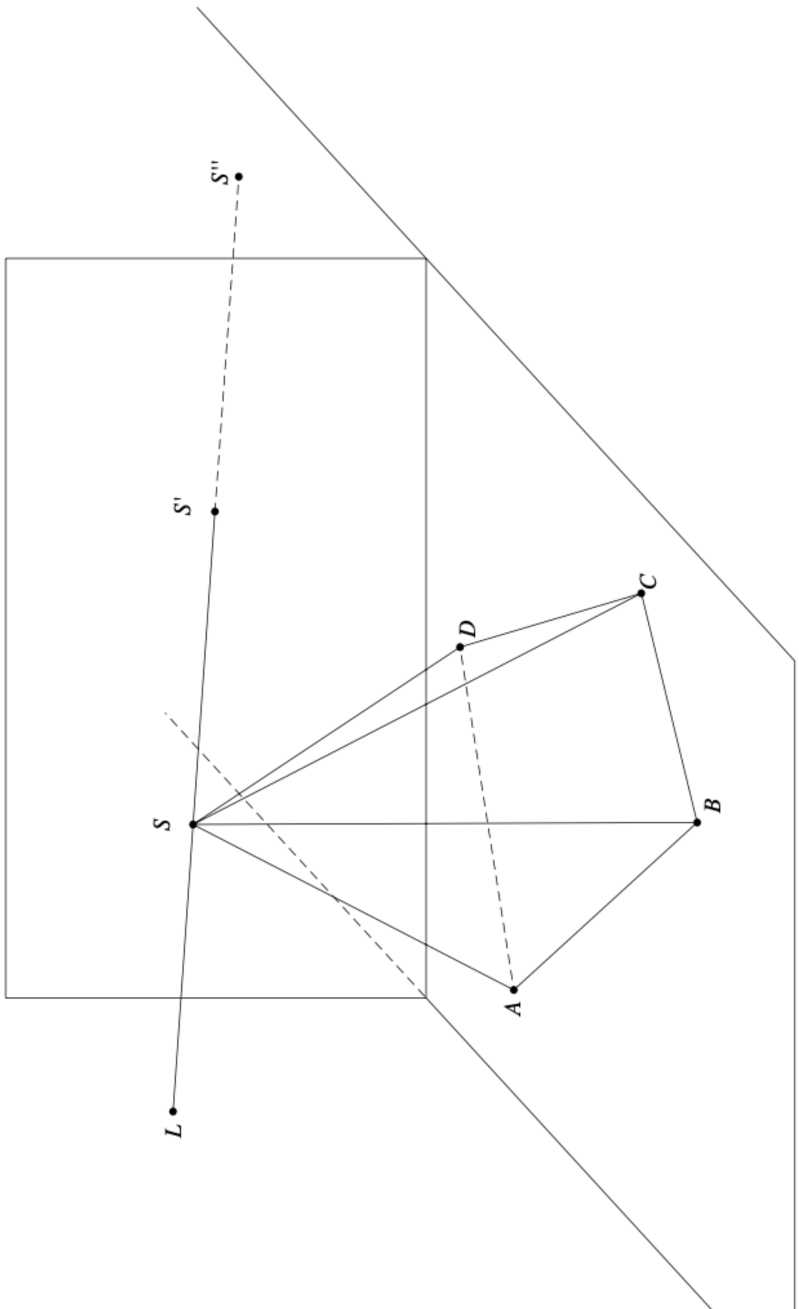
Le parallélépipède rectangle représenté est posé sur le sol, derrière le tableau. Le point O' est sur le sol et OO' est parallèle aux arêtes verticales du parallélépipède.
Construire la projection centrale de centre O du parallélépipède sur le tableau.



Exercice 2.19

La pyramide de sommet S a sa base $ABCD$ située sur le sol. Elle est éclairée par une source lumineuse L. L'ombre de S sur le mur est S', alors que son ombre sur le sol serait S'' si le mur n'existait pas.

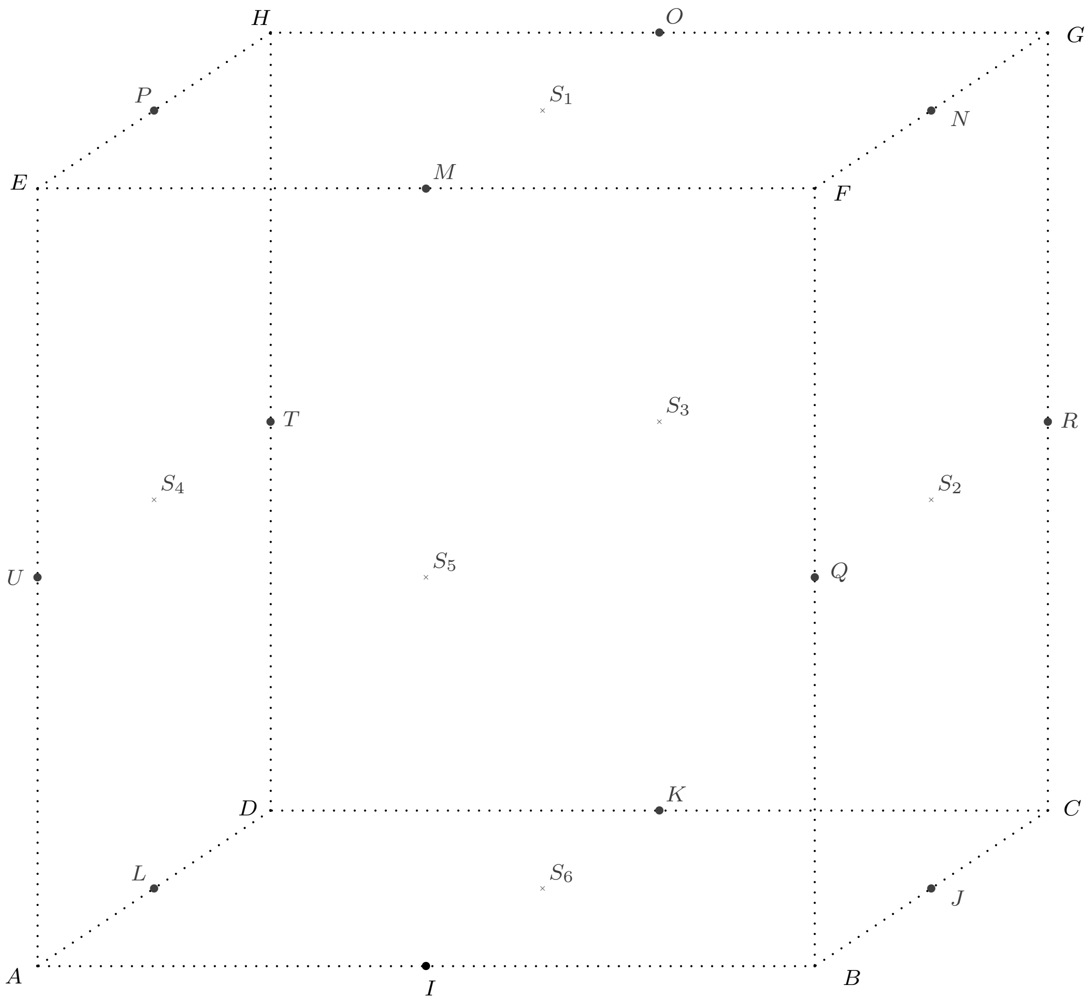
Construire l'ombre de la pyramide sur le sol et le mur.



3. Sections dans le cube

Dans le cube $ABCDEFGH$, on note :

- I le milieu de AB
- J le milieu de BC
- K le milieu de CD
- L le milieu de AD
- M le milieu de EF
- N le milieu de FG
- O le milieu de GH
- P le milieu de EH
- R le milieu de CG
- T le milieu de DH
- U le milieu de AE
- Q le milieu de BF
- S_1 le milieu de la face $EFGH$
- S_2 le milieu de la face $BCGF$
- S_3 le milieu de la face $CGHD$
- S_4 le milieu de la face $ADHE$
- S_5 le milieu de la face $ABFE$
- S_6 le milieu de la face $ABCD$



Les constructions se font sur les pages suivantes en tenant compte de la visibilité.

Exercice 3.1
Dans le cube $ABCDEFGH$ représenter les plans $PNJL$ et $HGBA$.

Exercice 3.2
Représenter les plans $PNCD$ et $UQRT$.

Exercice 3.3
Notons par exemple X_{MF} le milieu de MF.
Représenter les plans $EHCB$ et $X_{MF}X_{OG}X_{KC}X_{IB}$.

Exercice 3.4
Représenter les plans $EHCB$ et $HGBA$.

Exercice 3.5
Représenter le triangle EHJ et le quadrilatère $S_1S_4S_6S_2$.

Exercice 3.6
Représenter le triangle S_1BC et le plan $EHRQ$.

Exercice 3.7
Représenter les triangles PNS_6 et AOC.

Exercice 3.8
Représenter les triangles PNS_6 et EOC.

Exercice 3.9
Dans le cube $ABCDEFGH$ représenter la pyramide $ABCDS_1$ et le plan $UQRT$.

Exercice 3.10
Représenter la pyramide $ABCDS_1$ et le plan $IJNM$.

Exercice 3.11
Représenter la pyramide $ABCDS_1$ et le plan $UQGH$.

Exercice 3.12
Représenter la pyramide $IJKLS_1$ et le plan $BCHE$.

Exercice 3.13
Représenter la pyramide $IJKLS_1$ et le plan $ABRT$.

Exercice 3.14
Représenter l'octaèdre $S_1S_2S_3S_4S_5S_6$ et le plan $BDHF$.

Exercice 3.15
Représenter l'octaèdre $S_1S_2S_3S_4S_5S_6$ et le plan $UQGH$.

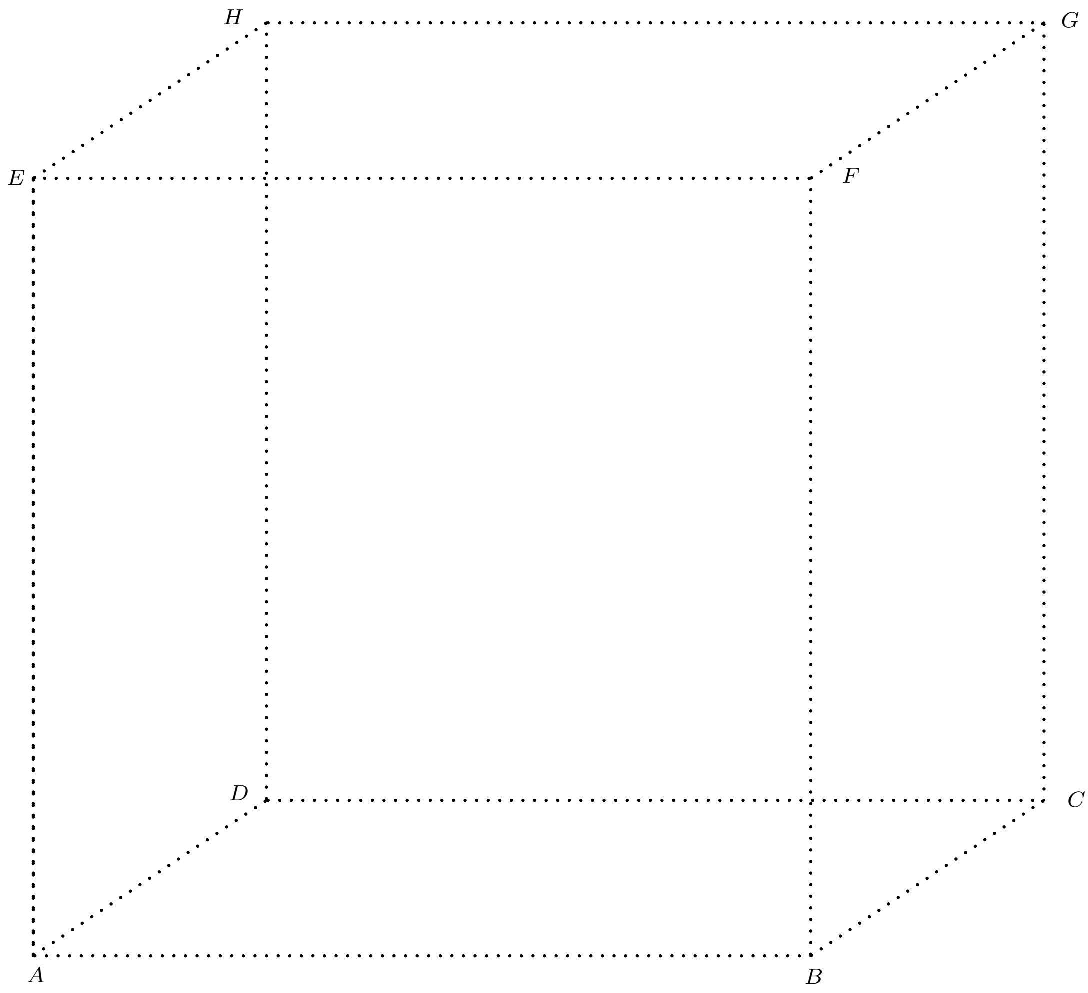
Exercice 3.16
Représenter l'octaèdre $S_1S_2S_3S_4S_5S_6$ et le plan $ABGH$.

Exercice 3.17
Représenter l'octaèdre $S_1S_2S_3S_4S_5S_6$ et le plan UPO.

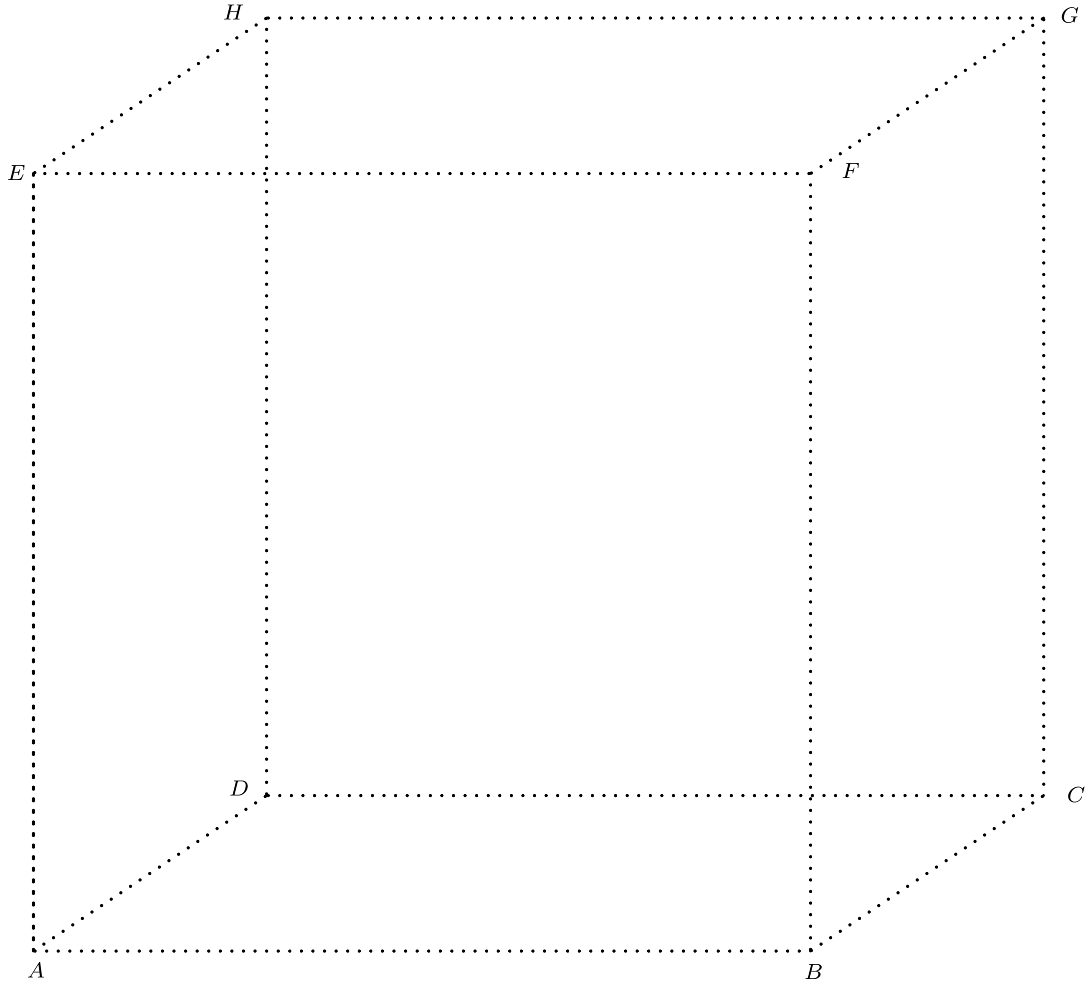
Exercice 3.18
Soit Y sur AB tel que $YB = 2.5$ cm. Soit X sur DC tel que $XC = 2.5$ cm. Soit Z sur HG tel que $HZ = 1.0$ cm.
Représenter l'octaèdre $S_1S_2S_3S_4S_5S_6$ et le plan XYZ.

Exercice 3.19
Représenter l'intersection des pyramides $ABCDH$ et $IJKLM$.

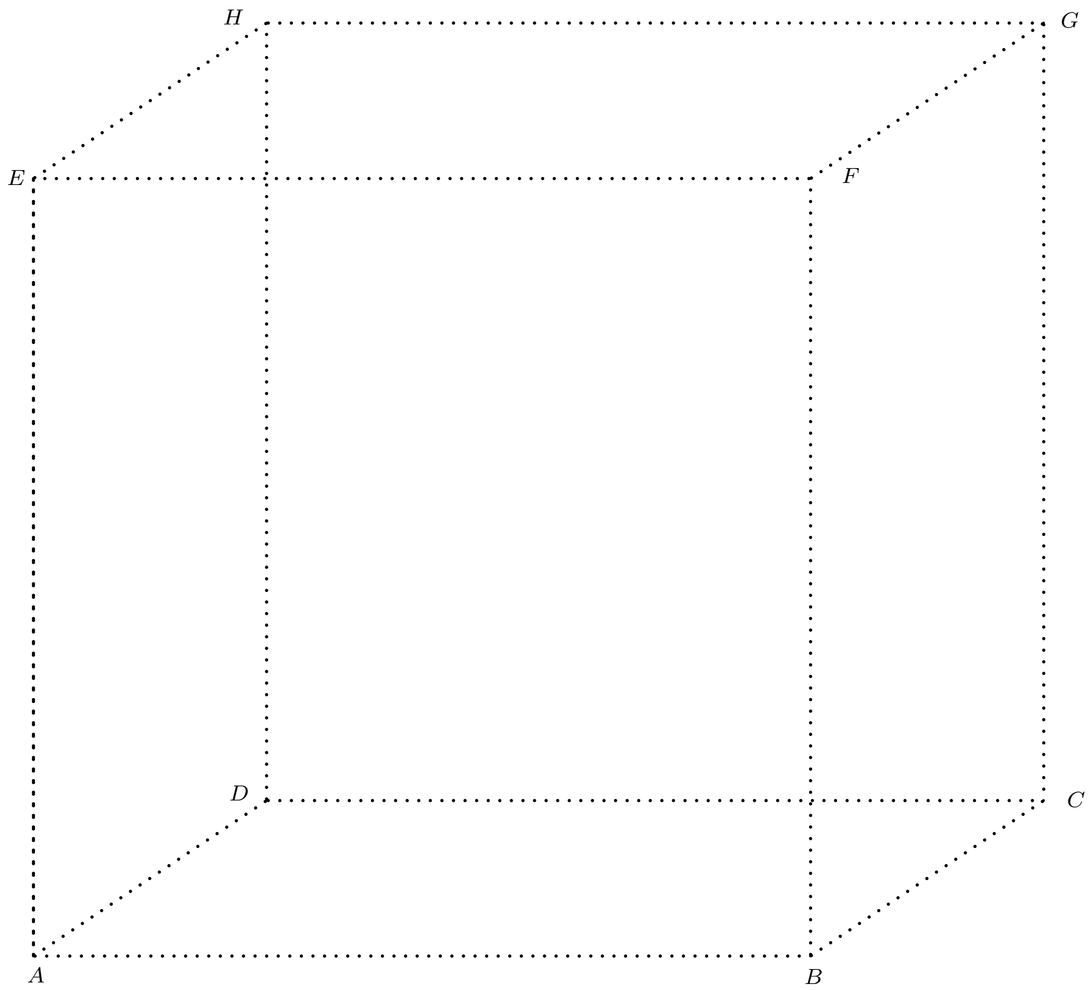
Exercice 3.1



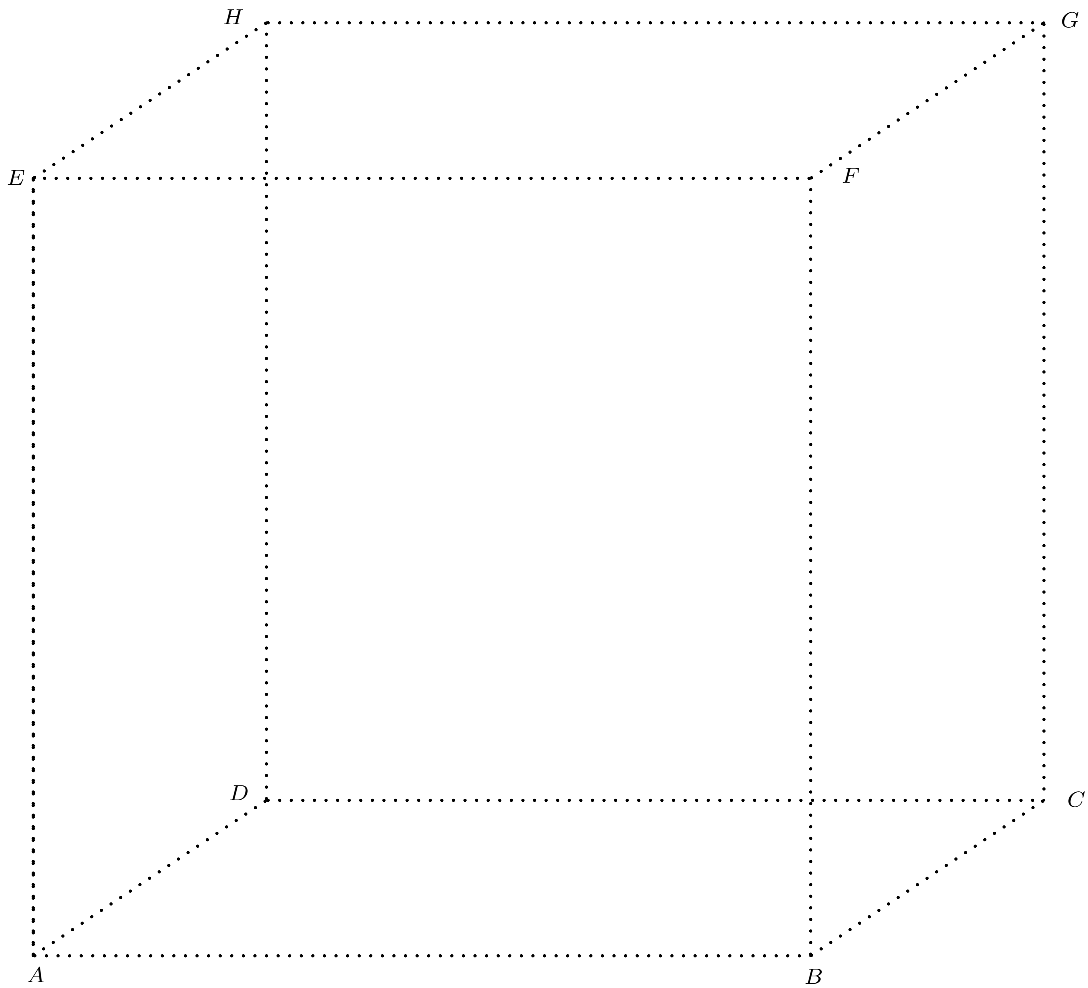
Exercice 3.2



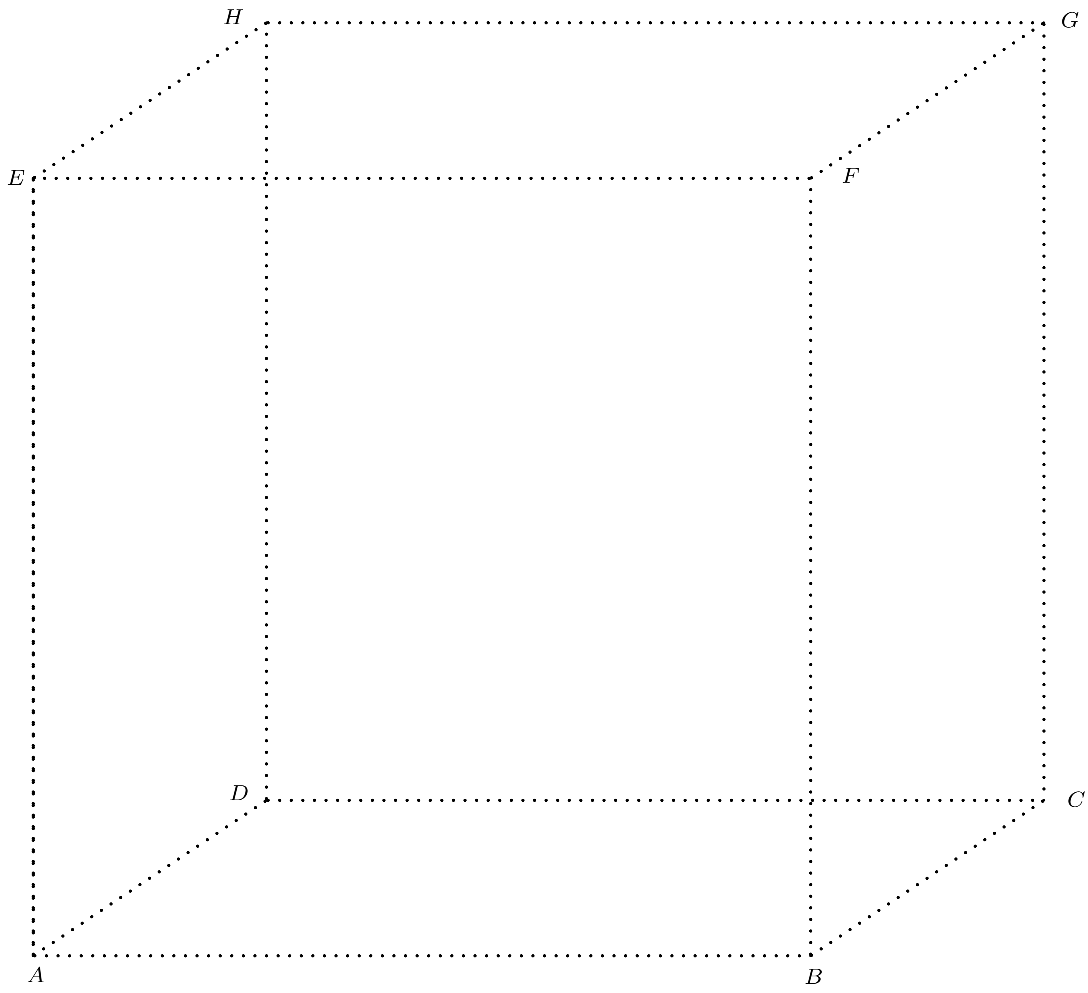
Exercice 3.3



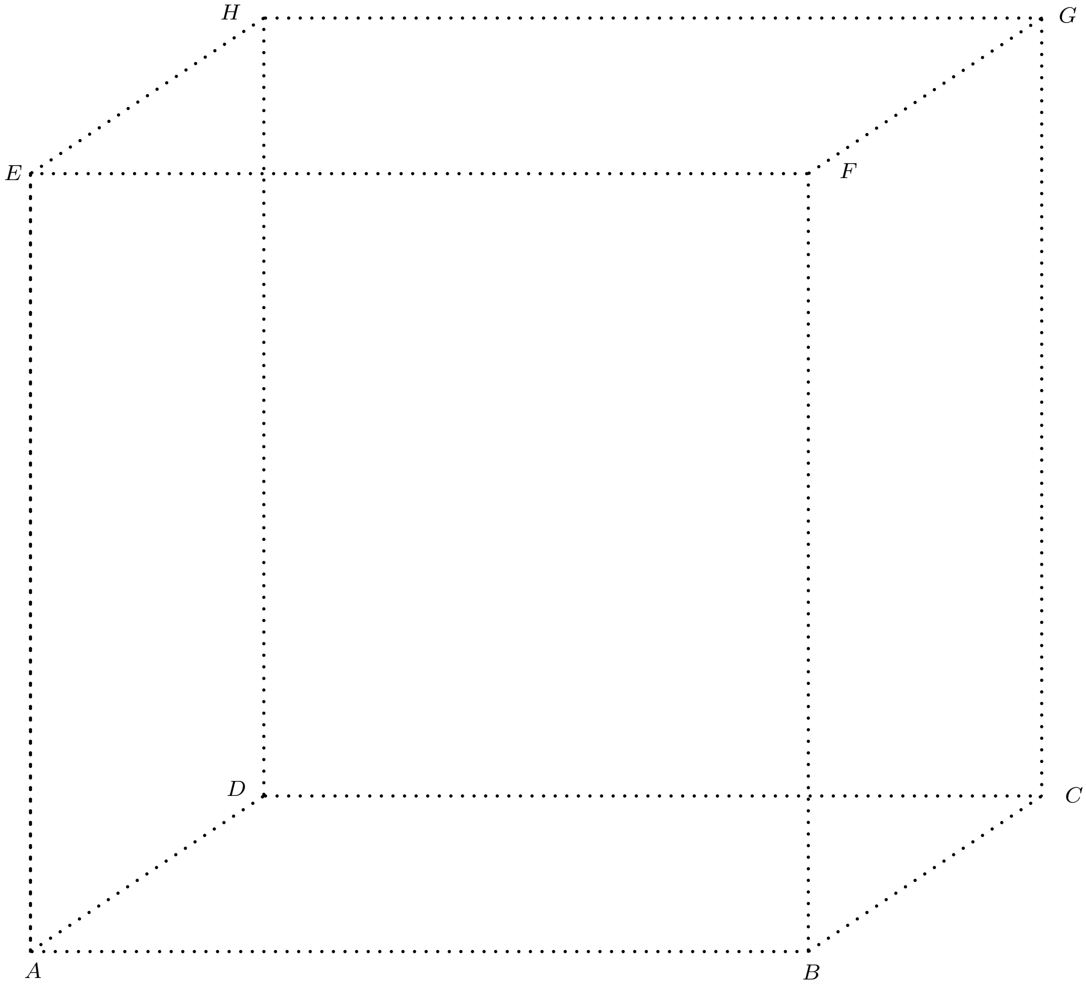
Exercice 3.4



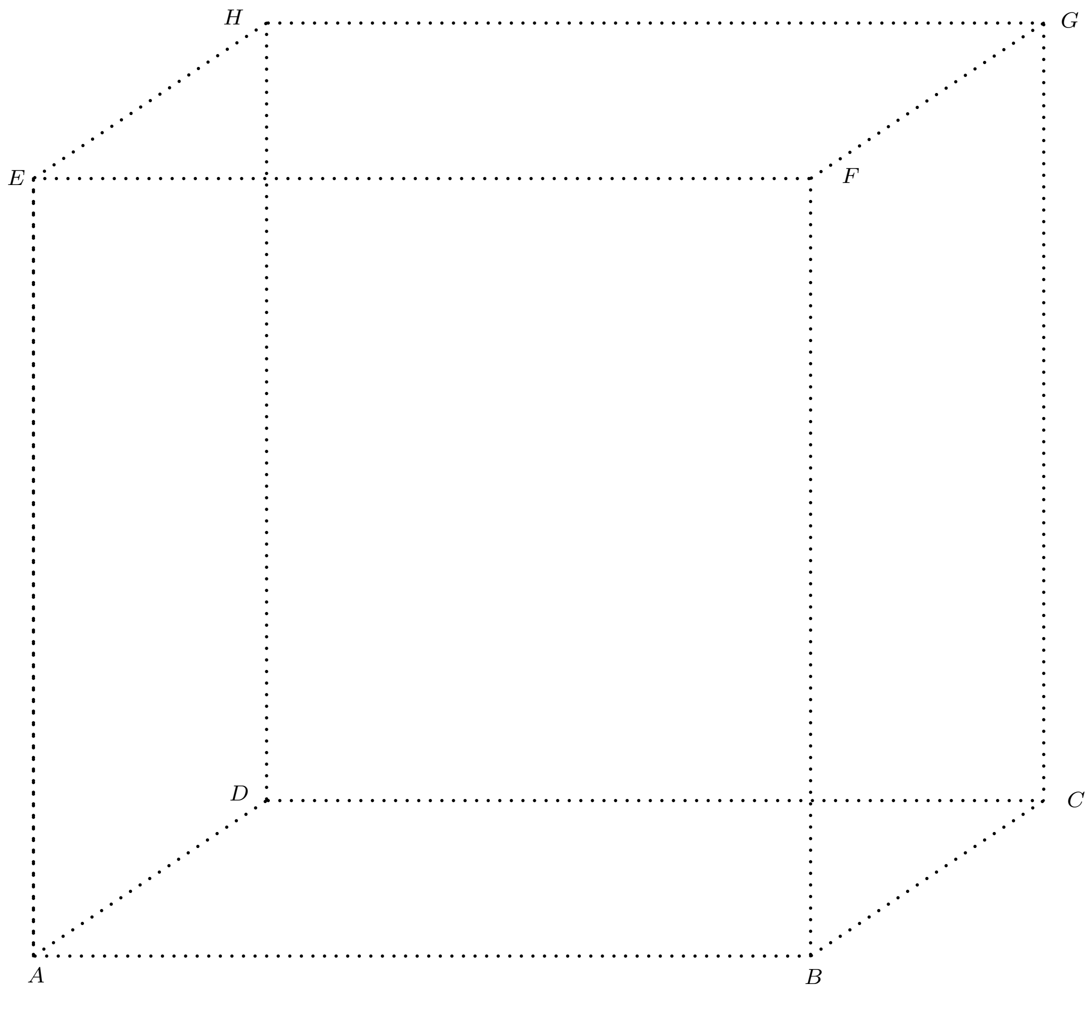
Exercice 3.5



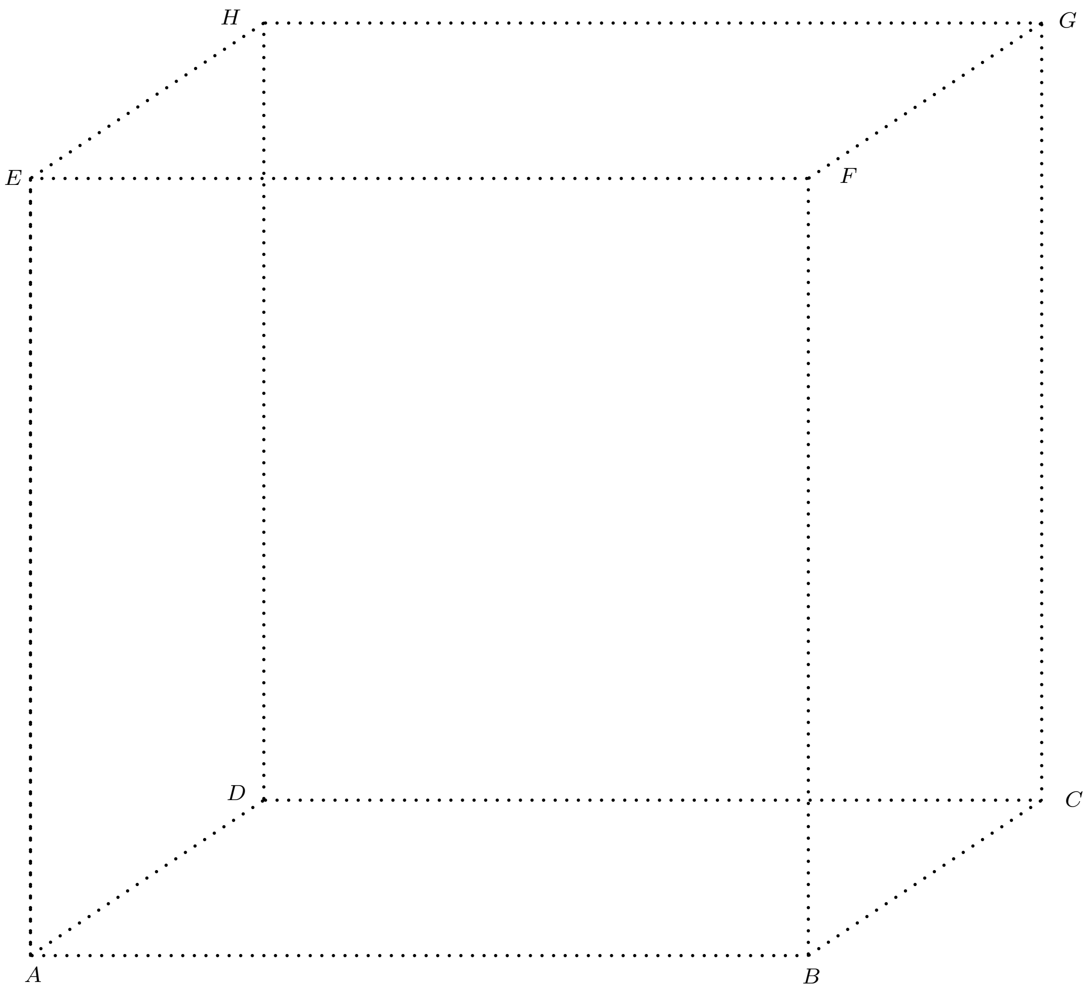
Exercice 3.6



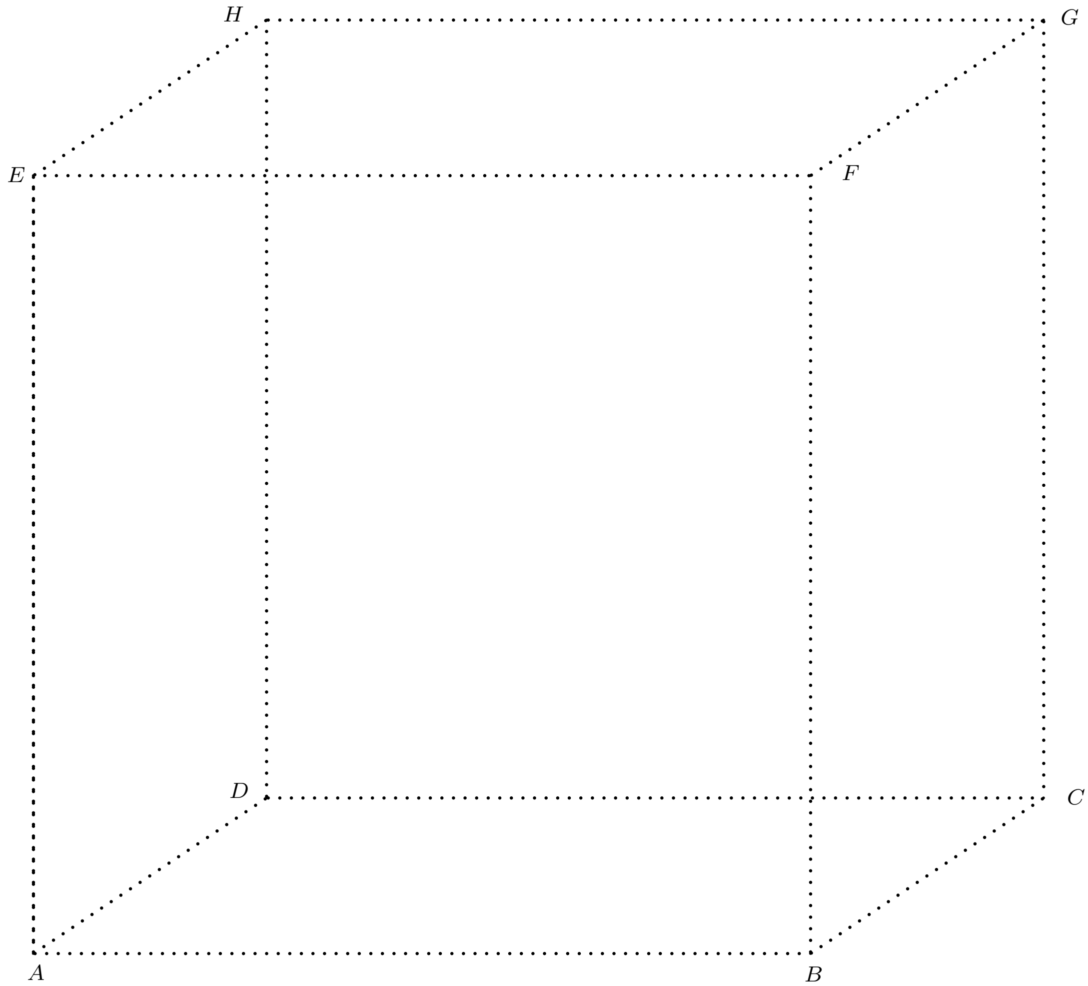
Exercice 3.7



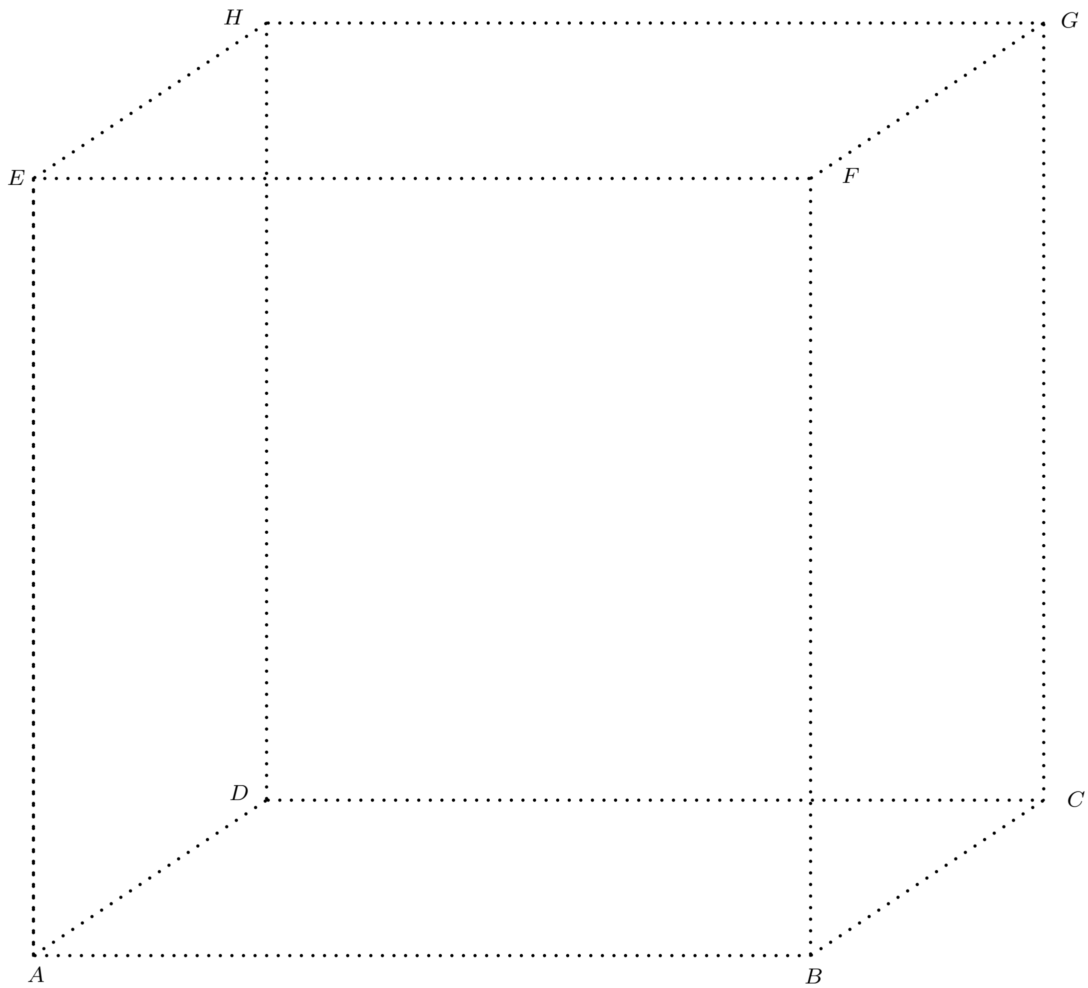
Exercice 3.8



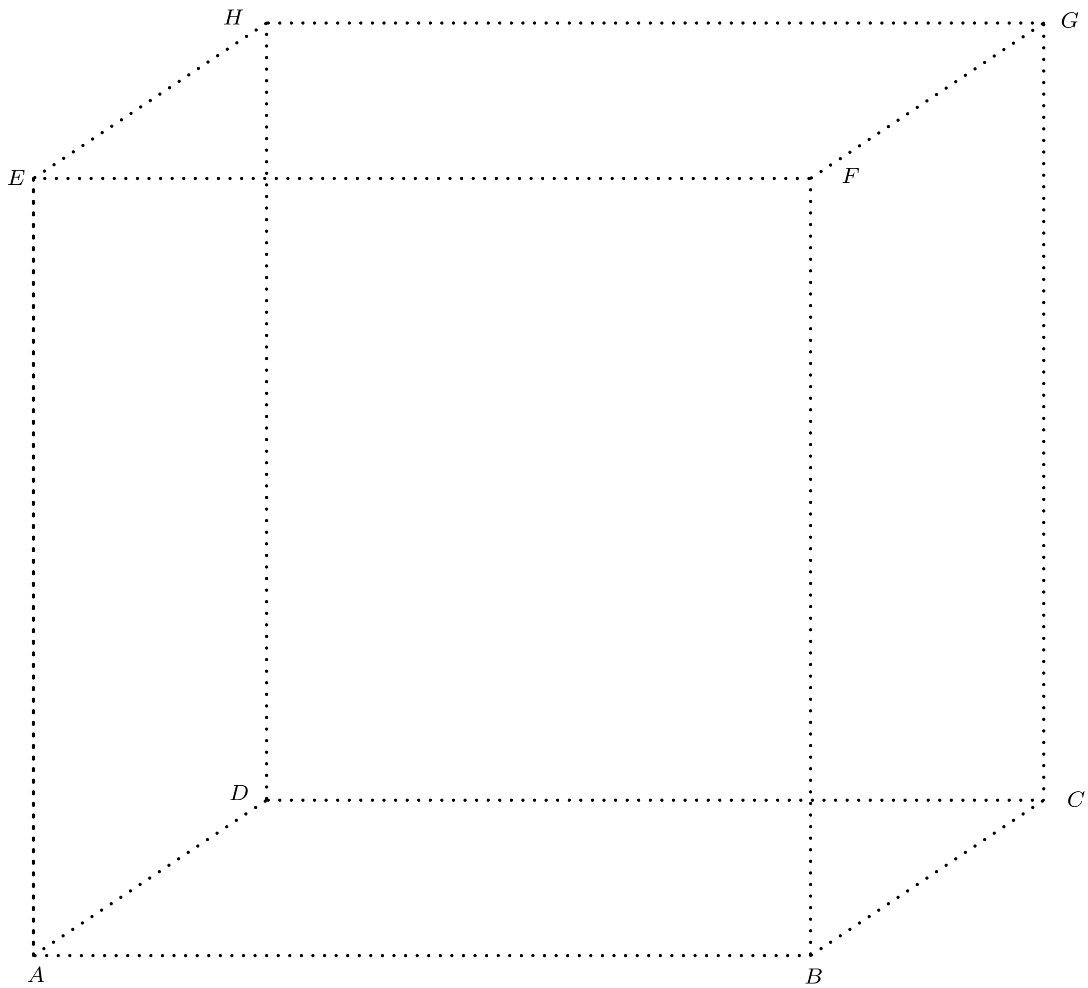
Exercice 3.9



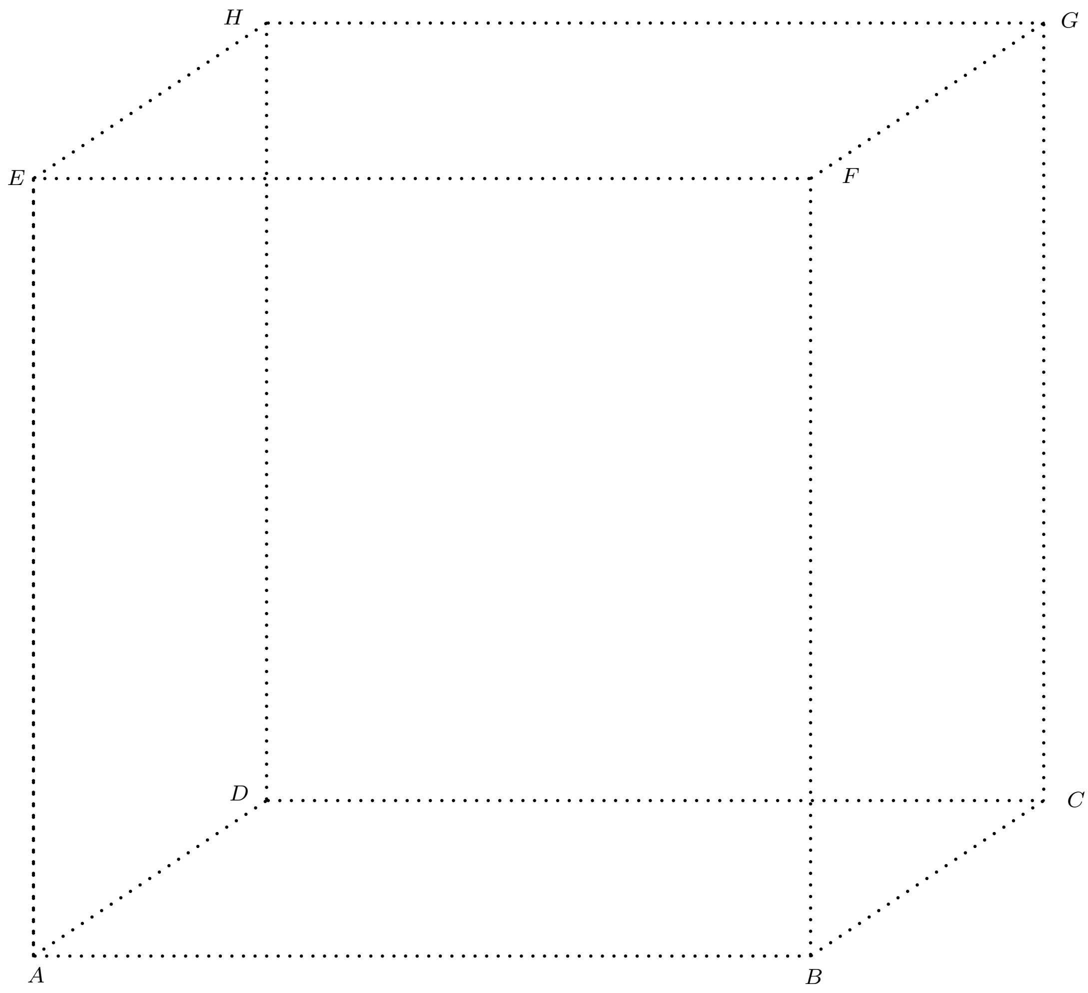
Exercice 3.10



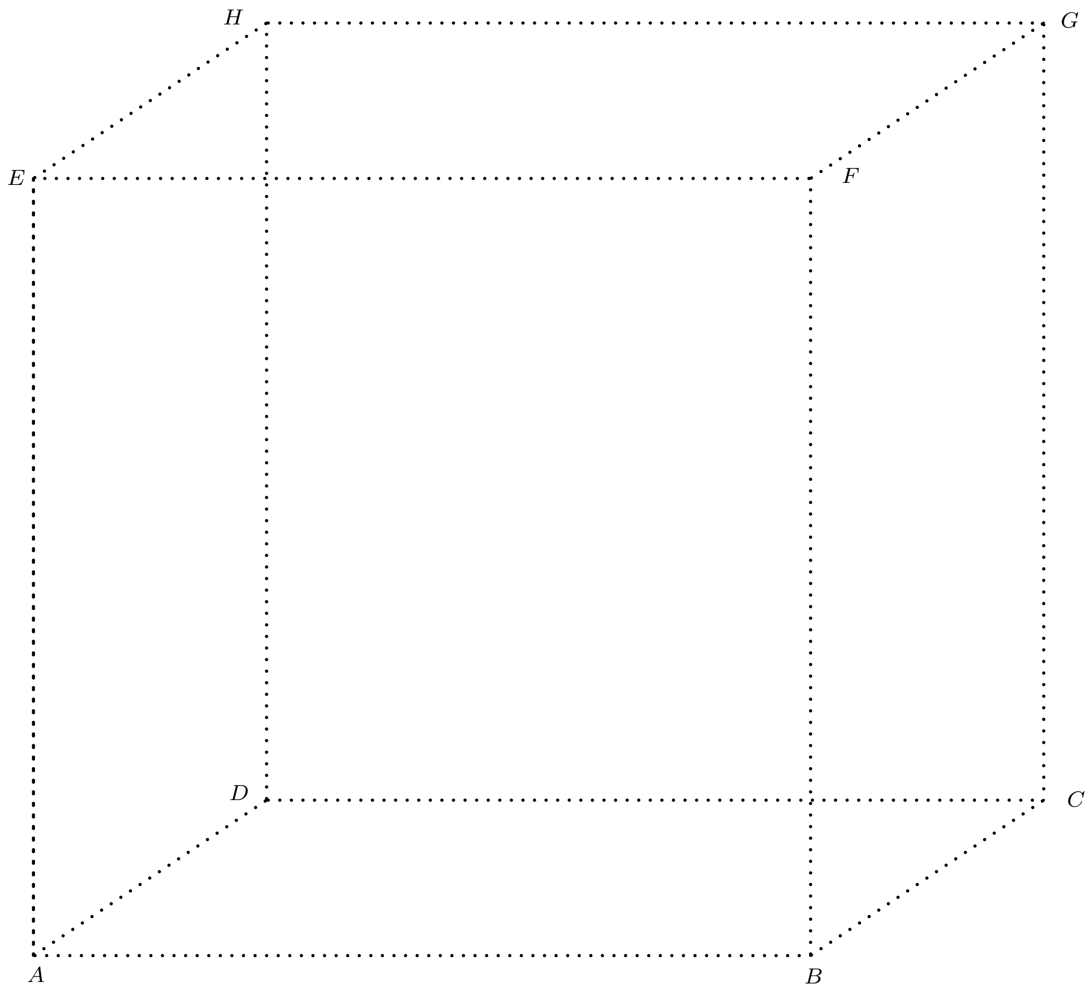
Exercice 3.11



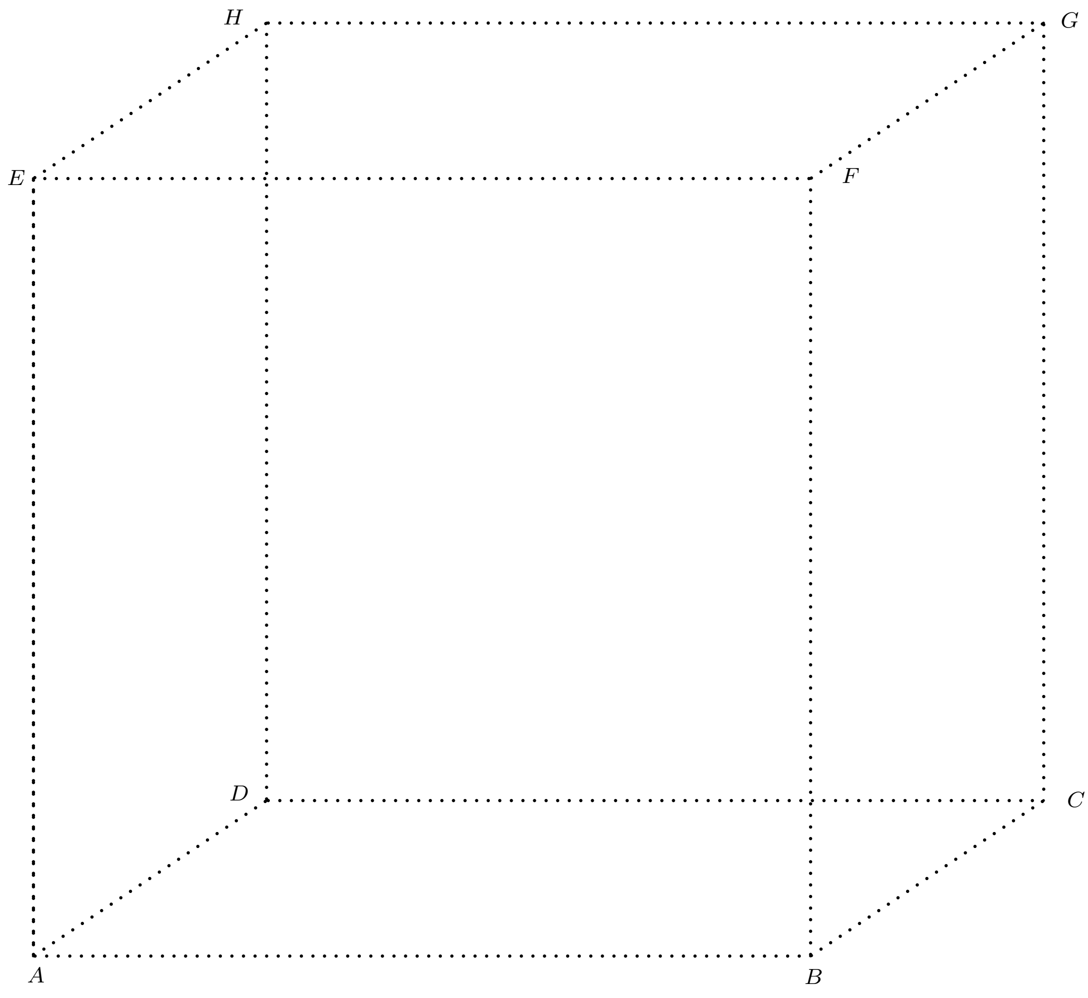
Exercice 3.12



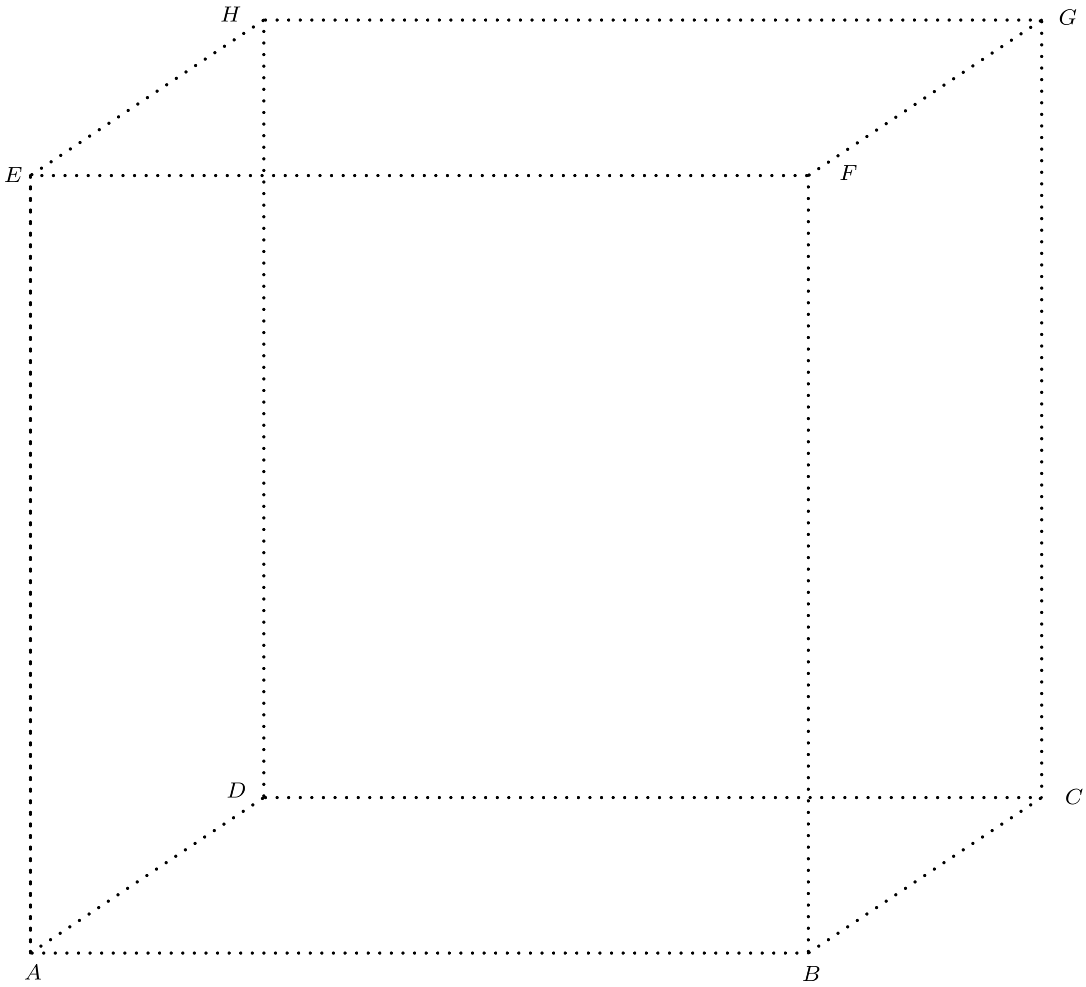
Exercice 3.13



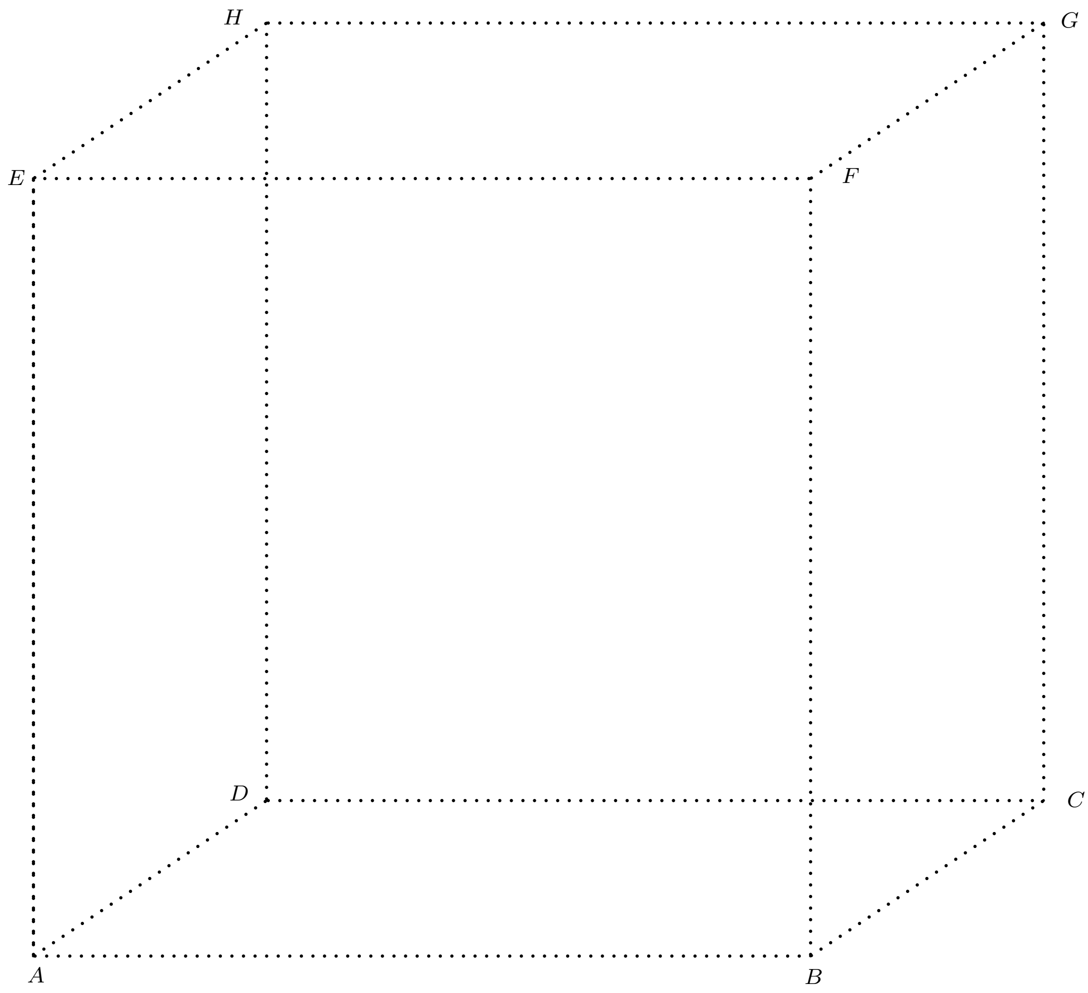
Exercice 3.14



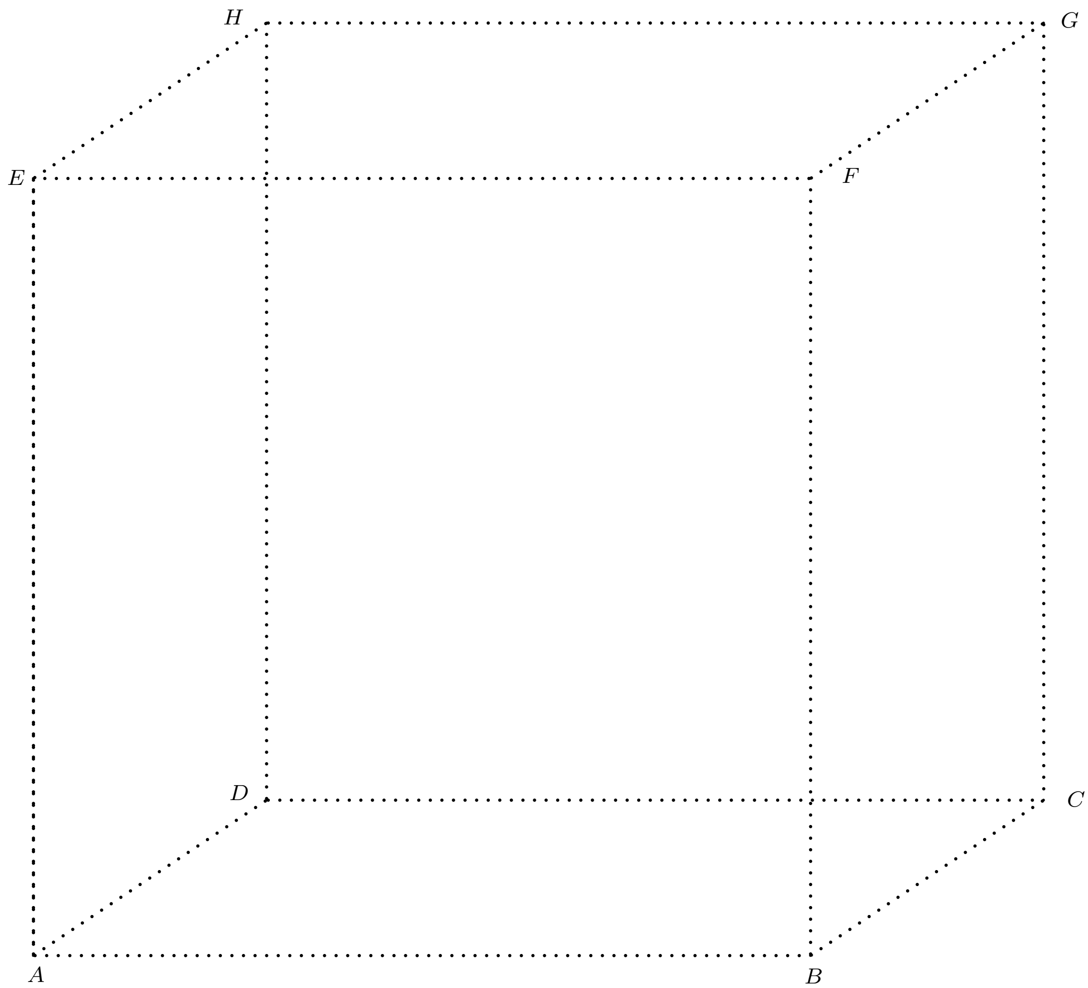
Exercice 3.15



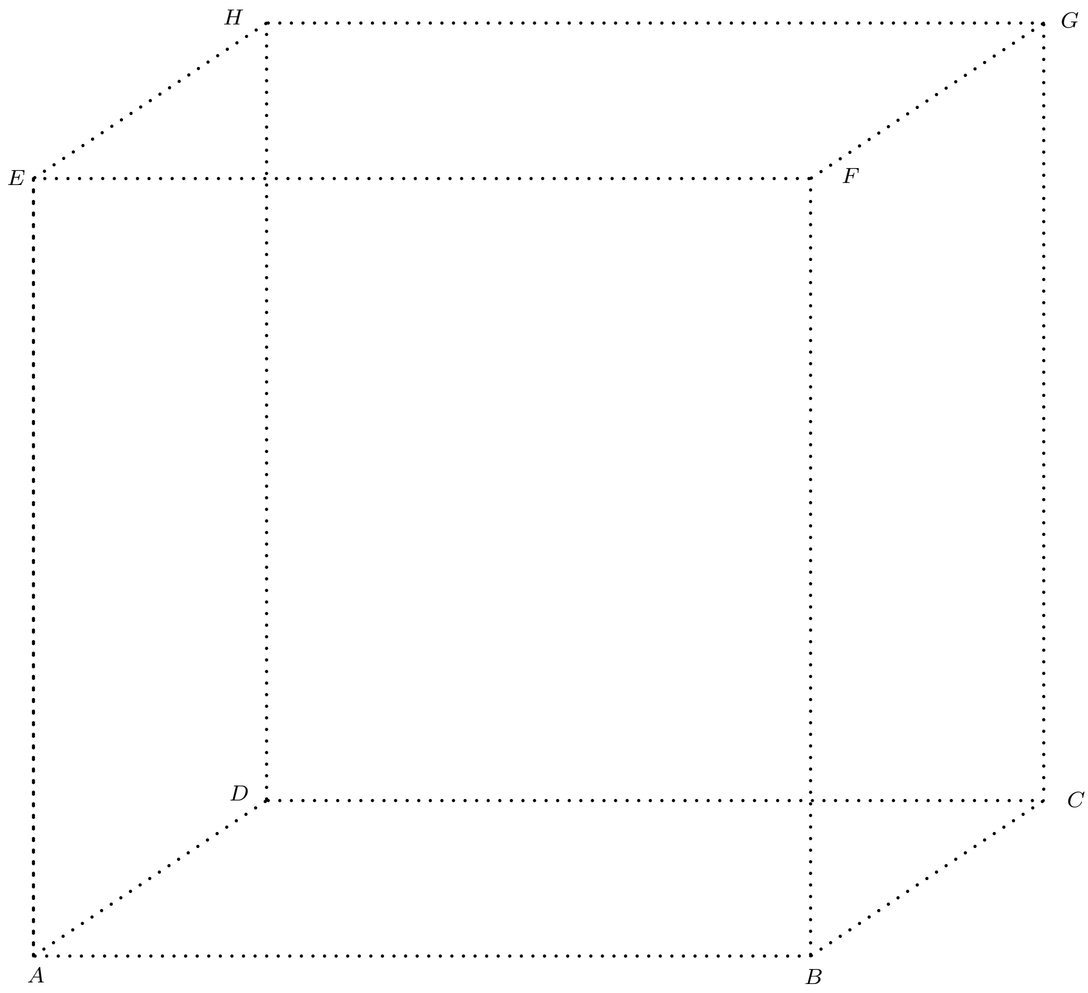
Exercice 3.16



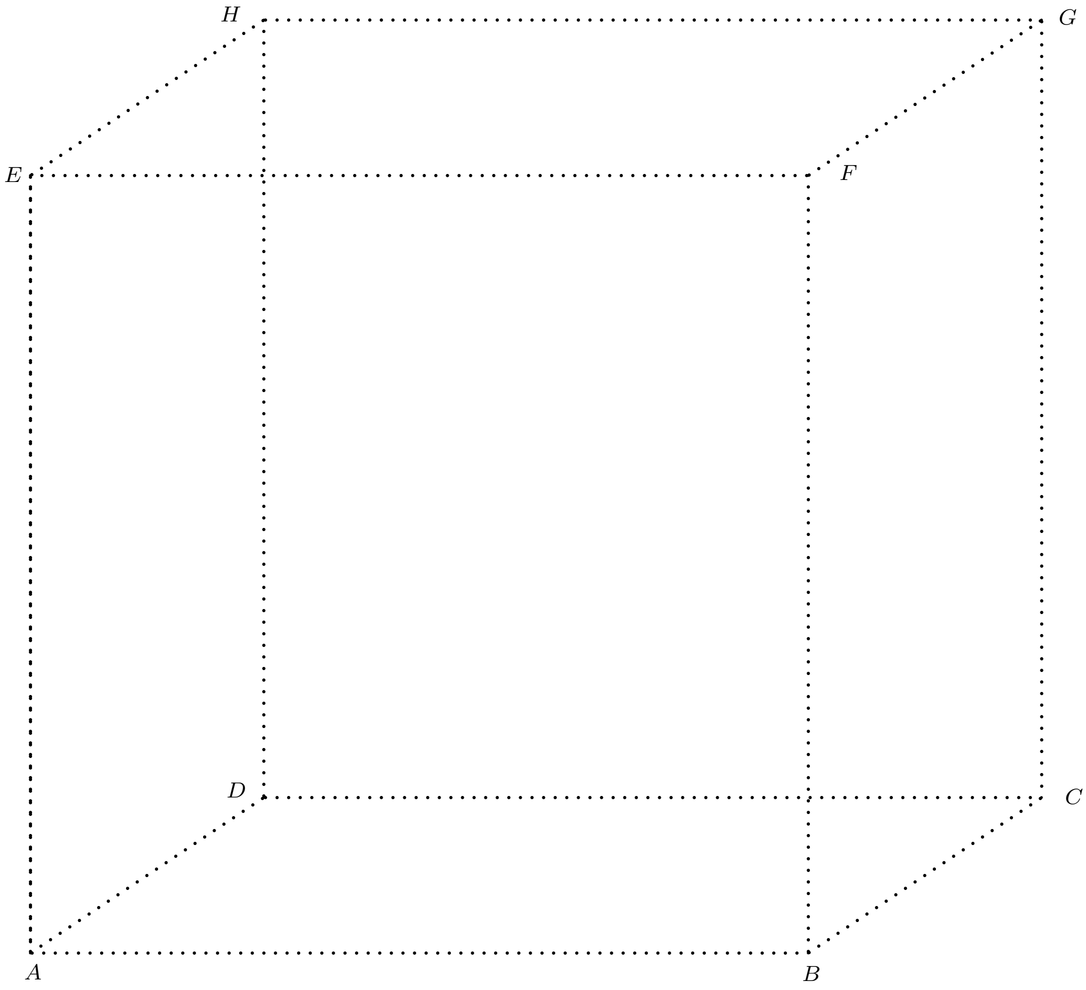
Exercice 3.17



Exercice 3.18



Exercice 3.19



4. Axiomes de la géométrie de l'espace

4.1 Axiomes sur les points, droites et plans

A1 Par deux points distincts, il passe une et une seule droite.

A2 Les droites sont infinies et rectilignes.

A3 Par trois points non alignés, il passe un et un seul plan.

A4 Les plans sont infinis et plats.

A5 Si deux points d'une droite appartiennent à un plan, alors toute la droite appartient à ce plan.

A6 Si deux plans ont un point commun sans être confondus, alors leur intersection est une droite.

A7 Par un point donné, il passe une infinité de plans.

A8 Par une droite et un point extérieur à cette droite, il passe un et un seul plan.

A9 Deux droites sécantes sont contenues dans un unique plan.

A10 Deux droites parallèles sont coplanaires.

A11 Par un point extérieur à une droite, il passe une et une seule droite parallèle à cette droite (postulat d'Euclide).

4.2 Parallélisme et perpendicularité

B1 Deux droites de l'espace peuvent être sécantes, parallèles ou gauches (non coplanaires).

B2 Si deux droites sont parallèles à une même troisième, elles ne sont pas nécessairement parallèles entre elles.

B3 Un plan peut être parallèle à une droite sans la contenir.

B4 Deux plans peuvent être parallèles ou sécants.

B5 Si une droite est perpendiculaire à deux droites sécantes d'un plan, alors elle est perpendiculaire à ce plan.